MATH 325
ÉNONCÉS DES EXERCICES 2

A. ZEYTİN

(1) Montrer que si $\sum_{n=o}^{\infty} z_n$ converge, alors $\lim_{n\longrightarrow\infty} z_n = 0$

(2) Montrer que la suite $\{z_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty}(z_n - z_{n-1})$ converge.

(3) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(4) Montrer que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$ converge, aussi. (On ne suppose pas que $a_n > 0$!!!)

(5) Soient $f, g\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions analytiques. Montrer que
- $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$
- $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
- $(f/g)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$; où $g(z) \neq 0$.

(6) Calculer:
- $\limsup\limits_{n\longrightarrow\infty} (-1)^n + \dfrac{1}{n^2+n}$
- $\limsup\limits_{n\longrightarrow\infty} (-1)^n n^3$
- $\limsup\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{1+(-1)^n 3n}{2n+325}$
- $\limsup\limits_{n\longrightarrow\infty} \arctan(n)\sin(\dfrac{n^2\pi}{2})$
- $\limsup\limits_{n\longrightarrow\infty} e^{-n^2}\cos(\dfrac{n\pi}{2})$

(7) Montrer que
$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\longrightarrow\infty} a_n + \limsup_{n\longrightarrow\infty} b_n.$$
Donner un exemple, c'est-à-dire trouver deux suites a_n et b_n tels que
$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}(a_n + b_n) < \limsup_{n\longrightarrow\infty} a_n + \limsup_{n\longrightarrow\infty} b_n.$$
Qu'est-ce que vous pouvez dire pour limsup du produit $a_n b_n$ et a_n/b_n; où $b_n \neq 0$.

(8) Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes:
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}3^{n+2}}{5^n} z^n$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n+2}} z^n$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^3}{3^n} z^n$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(n^4+2)} z^n$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n n!} z^n$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n)^n z^n$

(9) Soient $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ et $g\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions dérivables. Montrer que $f \circ g$ est dérivable, aussi.

(10) On définit $\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ et $\sinh(x) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$.

  i. Dessiner les courbes $y = \sinh(x)$ et $y = \cosh(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$.
  ii. Calculer $\frac{d}{dz}(\sin(z))$, $\frac{d}{dz}(\cos(z))$, $\frac{d}{dz}(\sinh(z))$ et $\frac{d}{dz}(\cosh(z))$.
  iii. Vérifier les identités suivantes:
    - $\cos(z_1 + z_2) = \cosh(\sqrt{-1}z_1 + \sqrt{-1}z_2)$
    - $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) + \sinh(z_1)\sinh(z_2)$
    - $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh(z_1)\cosh(z_2) + \cosh(z_1)\sinh(z_2)$
    - $\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$
    - $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$
    - $\cosh(z_1 - z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) - \sinh(z_1)\sinh(z_2)$
    - $\sinh(z_1 - z_2) = \sinh(z_1)\cosh(z_2) - \cosh(z_1)\sinh(z_2)$
    - $\cos(z_1 - z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) + \sin(z_1)\sin(z_2)$
    - $\sin(z_1 - z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) - \cos(z_1)\sin(z_2)$
  iv. On définit $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ et $\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$.
    - Dessiner la courbe $y = \tanh(x)$ où $x \in \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$.
    - Vérifier $\tan(z) = -\sqrt{-1}\tanh(\sqrt{-1}z)$.
    - Calculer $\frac{d}{dz}(\tan(z))$ et $\frac{d}{dz}(\tanh(z))$.

(11) Calculer les intégrales suivantes et dessiner les arcs correspondants:

- $\int_\alpha z^2 dz$; où $\alpha = e^{2\sqrt{-1}\pi m t}$, $t \in [0, 1]$,
- $\int_\alpha z dz$; où $\alpha = tz_o + (1 - t)z_1$, $t \in [0, 1]$,
- $\int_\alpha e^z dz$; où $\alpha = t^2$, $t \in [0, 1]$.

(12) Soit T le triangle avec les sommets $4i$, -2 et $1 - i$. Calculer

- $\int_T z^2 + z dz$
- $\int_T 1 - z dz$

(13) Calculer $\int_\alpha e^{iz} dz$; où α est le cercle de rayon $1/325$ et

- centré à l'origine
- centré au point $z = -2$

(14) Calculer les intégrales $\int_{\alpha_i} \frac{dz}{z^2+1}$; $i = 1, 2$, si la courbe α_i reliant les points 2 et $2i$ est donnée comme suit:

- α_1 est le segment rectiligne
- α_2 est la ligne brisée allant de 2 à 1 et puis de -1 à $2i$.