# MATH 325
# ÉNONCÉS DES EXERCICES 3

A. ZEYTİN

(1) Soit $f(z) = z^4 + 3z^2 + 1$. Déterminer la série entière de $f(z)$ en:
- ▶ $z_0 = 0$
- ▶ $z_0 = 1$
- ▶ $z_0 = \sqrt{-1}$
- ▶ $z_0 = -1$
- ▶ $z_0 = -\sqrt{-1}$

(2) Soit $f(z) = e^z$. Déterminer la série entière de $f$ en $z_o = a \in \mathbf{C}$ quelconque.

(3) Soit $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction entière. Rappeler que $f$ est dit
- i. paire si $f(-z) = f(z)$ pour tout $z \in \mathbf{C}$, et
- ii. impaire si $f(-z) = -f(z)$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.
- ▶ Montrer que si $f$ est une fonction impaire et si on écrit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors $a_{2k} = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.
- ▶ Montrer que si $f$ est une fonction paire et si on écrit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

(4) Soit $f$ une fonction entière. Si $|f'(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbf{C}$, alors montrer que $f(z) = a + bz^2$; où $a, b \in \mathbf{C}$ avec $|b| \leq \frac{1}{2}$.

(5) Supposons que $f$ est une fonction entière qui satisfait: pour tout $z \in \mathbf{C}$ soit $|f(z)| \leq 1$ soit $|f'(z)| \leq 1$. Montrer que $f$ est un polynôme de dégre au plus 1. Indication: Avec l'aide d'un intégrale, montrer que $|f(z)| \leq A + |z|$; où $A = \max\{1, |f(0)|\}$.

(6) Déterminer la série entière qui représente $\frac{1}{z^2}$ en $z_o = 3$. Quel est sa rayon de convergence?

(7) Soit $f(z) = \sin(\frac{1}{z^2})$ et soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n$ sa série entière. Trouver $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$. Que attendez vous de rayon de converegence de cette série?

(8) Déterminer la fonction représentée par la série entière suivantes:
- ▶ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$
- ▶ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$

Dans quelle partie de $\mathbf{C}$ l'égalité est valide?

(9) Supposons que $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique. Déterminer $f$ si $f$ satisfait $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(10) Supposons que $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique non-constante. Montrer qu'il existe un $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ tel que $f(\frac{1}{n}) \neq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$.

(11) Soit $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique. Supposons que $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$. Déterminer $f$.

(12) Déterminer les multiplicités suivantes:
- ▶ $f(z) = z^2 \sin(z^2)$ en $z_o = 0$ et $z_o = k\pi$ où $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$,
- ▶ $f(z) = \cos^2(z) - 1$ en $z_o = 0$, et $z_o = 2k\pi$ où $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$,
- ▶ $f(z) = e^{z^2} - e$ en $z_o = 1$.

(13) Soit $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction entière. Si $|\mathrm{Im}(f)| > 0$ pour tout $z \in \mathbf{C}$ montrer que $f$ est constante. Indication: Considerer $g(z) = e^{\sqrt{-1}f(z)}$.

(14) Soit $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction entière. Supposons que $f(z) = f(z+1)$ et $f(z) = f(z+\sqrt{-1})$ pour tout $z \in \mathbf{Z}$, (i.e. $f$ est 1-périodique et $\sqrt{-1}$-périodique.). Montrer que $f$ est constante.

(15) Calculer

- $\displaystyle\int_{\alpha} \frac{1}{z^4+1} dz$
- $\displaystyle\int_{\alpha} \frac{1}{(1+z^4)^2} dz$

où $\alpha$ est le cercle de centre $1+\sqrt{-1}$ et rayon $\frac{1}{2}$ orienté de sens anti-horaire.

(16) Déterminer le rayon de converegence des séries entières en $z_o = 0$ des fonctions suivantes :

- $f(z) = \dfrac{1}{z+\sqrt{-1}}$,
- $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z+1}$,
- $f(z) = \dfrac{1}{\cos(z)}$.

(17) Calculer $\displaystyle\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\alpha} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$ si $\alpha$ est

- le cercle de centre 0 et rayon $\frac{1}{2}$ orienté de sens anti-horaire,
- le cercle de centre 0 et rayon $\frac{1}{2}$ orienté de sens horaire,
- le cercle de centre 1 et rayon $\frac{1}{2}$ orienté de sens anti-horaire,
- le cercle de centre 1 et rayon $\frac{1}{2}$ orienté de sens horaire.

(18) Soit $f\colon B(0,5) \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique. Supposons que $|f(z)| \leq 10$ pour tout $z \in \partial B(\sqrt{-1}, 3)$. Trouver un majorant pour $|f^{(4)}(\sqrt{-1})|$.