MATH 325
ÉNONCÉS DES EXERCICES 4

A. ZEYTİN

(1) Déterminer le maximum de $|f|$ sur $\overline{\mathbb{D}}$ où:
- $f(z) = e^{z^2}$
- $f(z) = \dfrac{z+3}{z-3}$
- $f(z) = z^2 + z - 1$
- $f(z) = 3 - z^2$

(2) On considère $f(z) = z^2 - z$ comme une fonction de $\mathbb{D}$ vers $\mathbf{C}$. Déterminer le maximum et minimum de $|f|$ sur $\overline{\mathbb{D}}$.

(3) Soit f une fonction analytique non-constante sur un ouvert U contenant $\overline{\mathbb{D}}$ telle que, pour tout $z \in \partial\mathbb{D}$ $|f(z)| \geq 2$ et qui vérifie $f(0) = 1$. La fonction f s'annule-t-elle dans $\mathbb{D}$?

(4) Soit $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une fonction analytique, non-constante, bijective avec f^{-1} etant bijective. Montrer qu'il existe un réel $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $f(z) = e^{\theta\sqrt{-1}}z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(5) On fixe un $a \in \mathbb{D}$.
- Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{D}$ $\frac{z-a}{\overline{a}z-1} \in \mathbb{D}$, c'est-à-dire $\frac{z-a}{\overline{a}z-1} < 1$.
- Déduire que $\varphi_a\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ défini par $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{\overline{a}z-1}$ est une fonction analytique.
- Montrer que $\varphi_a^{-1} = \varphi_{\overline{a}}$. Déduire que φ_a est une bijection de $\mathbb{D}$ vers $\mathbb{D}$. Une telle fonction, i.e. une fonction $f\colon U \longrightarrow V$ qui est analytique et bijective est appelle un *isomorphisme analytique*.
- Soit $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une isomorphisme analytique. Montrer que $f(z) = e^{\theta\sqrt{-1}}z$ pour certain $\theta \in \mathbf{R}$.
- Montrer que $\varphi_a(a) = 0$, $\varphi_a(0) = a$.
- Soit maintenant $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une fonction analytique bijective. Montrer qu'il existe un réel $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $f(z) = e^{\theta\sqrt{-1}}\varphi_a(z)$ pour certain $a \in \mathbb{D}$. <u>Indication:</u> Choisir $a = f^{-1}(0)$. Calculer $f \circ \varphi_a(0)$ et utiliser Lemme de Schwarz.
- Est-ce que vous pouvez trouver une formule pour la composition $\varphi_a \circ \varphi_b$?

(6) Soit $f\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une fonction analytique telle qu'il existe deux éléments distincts $a, b \in \mathbb{D}$ avec $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Montrer que $f(z) = z$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

(7) Soit $f, g\colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ deux fonctions analytiques bijectives qui satisfait $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$. En plus, on suppose qu'il existe un $z_o \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tel que $f'(z_o) = g'(z_o) = 0$. Montrer que $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

(8) Déterminer le type de singularité des fonctions suivantes en les points induqués:
- $f(z) = \dfrac{e^z}{z^{17}}$ en $z_o = 0$
- $f(z) = \dfrac{(e^z - 1)^2}{z^2}$ en $z_o = 0$
- $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$ en $z_o = 1$
- $f(z) = \dfrac{\cos(z) - 1}{z^2}$ en $z_o = 0$
- $f(z) = \dfrac{\cos(z)}{z^2}$ en $z_o = 0$

- $f(z) = \dfrac{z^7+1}{z^7}$ en $z_o = 0$
- $f(z) = \dfrac{e^z-1}{z^4}$ en $z_o = 0$
- $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ en $z_o = 0$
- $f(z) = z^k e^{\frac{1}{z}}$ en $z_o = 0$; où $k \in \mathbf{N}$ fixé.