MATH 325
ÉNONCÉS DES EXERCICES 5

A. ZEYTİN

(1) Montrez que la singularité de $f(z) = \frac{z}{\sin(\pi \sin(z))}$ en $z = 0$ est apparente. Calculer la rayon de convergence de sa série en $z = 0$. Est-il une série de Taylor ou Laurent?

(2) Soit $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$. Développez f en série de Laurent qui converge dans les couronnes suivantes :
- $A^0_{0,1} = \mathbb{D} \setminus \{0\}$
- $A^1_{0,1}\{z \in \mathbf{C}\colon 0 < |z-1| < 1\}$
- $A^0_{1,\infty} = \{z \in \mathbf{C}\colon 1 < |z|\}$
- $A^1_{1,\infty} = \{z \in \mathbf{C}\colon 1 < |z-1|\}$

(3) Soit $f(z) = \sum_{n=\infty}^{\infty} a_n z^n$ le développement en série de Laurent d'une fonction analytique convergente sur une couronne $A = \{z \in \mathbf{C}\colon R_1 < |z| < R_2\}$; où $R_1, R_2 \in \mathbf{R}_+$ avec $R_1 < R_2$. Montrez que
- f est impaire si et seulement si $a_n = 0$ pour tout n pair, et
- f est paire si et seulement si $a_n = 0$ pour tout n impair.

(4) Déterminez les domaines de convergence des séries de Laurent suivantes:
- $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{|n|!}$
- $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{n^2+1}$
- $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-3)^{2n}}{(n^2+1)^n}$
- $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n z^n$; où $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ fixé.
- $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n (z-c)^n$; où $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ et $c \in \mathbf{C}$ fixés.

(5) On considère la fonction $f(z) = \frac{z+1}{2z-z^2}$.
- Trouver les coefficients a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1 et a_2 de sa série de Laurent autour de la singularité en $z = 0$ et déterminez son rayon de convergence R.
- Trouver les coefficients a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1 et a_2 de sa série de Laurent autour de la singularité en $z = 2$ et qui converge dans la couronne $A = \{z \in \mathbf{C}\colon |z| > R\}$.

(6) Développez $f(z) = \frac{1}{z^6(z-1)^2(z+2)}$ en série de Laurent
- dans la couronne $A^0_{0,1} = \{z \in \mathbf{C}\colon 0 < |z| < 1\}$
- dans la couronne $A^0_{1,2} = \{z \in \mathbf{C}\colon 1 < |z| < 2\}$
- dans la couronne $A^0_{2,\infty} = \{z \in \mathbf{C}\colon 2 < |z|\}$

(7) Développez en série de Laurent dans les différentes couronnes admissibles de centre indiqué (c'est-à-dire a) les fonctions suivantes :
- $f(z) = \dfrac{1}{1-z^2} + \dfrac{1}{3-z}$, $a = 0$
- $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^3}$, $a = 1$
- $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{1-z}$, $a = 0$

(8) Déterminer la partie principale du développement en série de Laurent à l'origine de $f(z) = \frac{1}{(e^z-1)^3}$.