MATH 325
ÉNONCÉS DES EXERCICES 6

A. ZEYTİN

(1) Décider le type de singularité des fonctions suivantes en calculant leurs séries de Laurent autour du point induqué:
- $f(z) = \dfrac{z^2}{z^2+1}$ en $z_o = \pm\sqrt{-1}$
- $f(z) = \dfrac{ze^{\sqrt{-1}z}}{z^2+1}$ en $z_o = \pm\sqrt{-1}$
- $f(z) = \dfrac{ze^{\sqrt{-1}z}}{z^2-1}$ en $z_o = \pm 1$
- $f(z) = \dfrac{1}{z^3+1}$ en $z_o = e^{2k+1}\pi\sqrt{-1}/3$; où $k = 0, 1, 2$
- $f(z) = \dfrac{\sin(z^2)}{z^2}$ en $z_o = 0$
- $f(z) = \dfrac{\cos(z)-1}{z^4}$ en $z_o = 0$
- $f(z) = (\cot(z))^4$ en $z_o = n\pi$; où $n \in \mathbf{Z}$
- $f(z) = \dfrac{z^2}{z^z-1}$ en $z_o = 0$
- $f(z) = \dfrac{z^2}{z^z-1}$ en $z_o = 2n\pi\sqrt{-1}$
- $f(z) = z^2e^{1/z}$ en $z_o = 0$
- $f(z) = \dfrac{\cos(z^2)-1}{z^3}$ en $z_o = 0$

(2) Pour toutes les fonctions dans Exercice 1 calculer leur résidue en points induqués.

(3) Décrire la nature de la singularité et calculer le résidu correspondant :
- $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^3}$
- $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^4-1}$
- $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin(z)}$
- $f(z) = \dfrac{1}{z^3\tan(z)\tanh(z)}$ (seulement en $z = 0$)
- $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{1-z}$
- $f(z) = \dfrac{\sin(\pi z)}{(z-1)^3}$
- $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z^3)-1}$ (seulement en $z = 0$)

(4) Déterminer la partie principale du developpement en série de Laurent à l'origine de $f(z) = \dfrac{1}{(e^z-1)^3}$ et l'utiliser pour calculer $\mathrm{Res}_0(f)$.

(5) Pour chacun des singularités des fonctions suivantes, donner l'expression de la partie principale associée et trouver le résidu correspondante :
- $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$

- $f(z) = z\cos(\frac{1}{z})$
- $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}}$; où $n \in \mathbf{N}$
- $f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$
- $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$
- $f(z) = \frac{1}{\sin(z^2)}$
- $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+\cos(z)}$
- $f(z) = \frac{1}{\sin(z) - \sinh(z)}$
- $f(z) = \frac{1}{z\sin(z)\sinh(z)}$

(6) Calculer $\int_\gamma \cot(z)dz$; où γ est le cercle de centre 0 et rayon 3, orienté anti-horaire.

(7) Calculer $\int_\gamma \frac{1}{z\sin(z)}dz$; où γ est le cercle de centre 1 et rayon 4, orienté anti-horaire.

(8) Calculer $\int_\gamma z^2 e^{1/z}\sin(1/z)dz$; où γ est le cercle de centre 0 et rayon 1, orienté anti-horaire.

(9) Soit $D \subset \mathbf{C}$ une partie ouverte, connexe et simplement connexe et soit γ le frontière de D, ∂D, orienté positivement. Supposons que $f\colon \overline{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique et $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$.
- Calculer $\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz$ comme une fonction de z_1 et z_2.
- Si on fixe z_1, qu'obtient-on pour $z_2 \longrightarrow z_1$.

(10) Soient $a, b, c \in \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ avec $0 < a < b < c$ et $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction entière. Calculer

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)(z-c)}dz\,;$$

où γ est le cercle de centre 0 et rayon R orienté positivement pour :
- $0 < R < a$
- $a < R < b$
- $b < R < c$
- $c < R$

Même question pour

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2(z-b)^2(z-c)^2}dz$$

Est-ce que vous pouvez généraliser?