MATH 325
ÉNONCÉS DES EXERCICES 7

A. ZEYTİN

(1) Calculer:
- ▶ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$
- ▶ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+9)} dx$
- ▶ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$; où $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$
- ▶ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3+8} dx$
- ▶ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{((1+x^2)^2)} dx$
- ▶ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(1+x^2)} dx$

(2) Soit $f(z) = x^5 + 15z + 1$. Montrer que
- ▶ tout les zéros (il y a 5!) de f sont dans $B(0,2)$, et
- ▶ le disque $B(0,3/2)$ contient just un zéro de f.
- ▶ Déduire que la couronne $A^0_{3/2,2} = \{w \in \mathbf{C} \colon 3/2 < |w| < 2\}$ contient 4 zéros de f.

(3) Soit $f(z) = z^5 + 4z - 15$.
- ▶ Montrer que f n'a pas des zéros dans le disque $B(0,1)$.
- ▶ Montrer que tout les zéros de f sont dans le disque $B(0,1)$.
- ▶ En déduire que tout les zéros de f sont dans la couronne $A^0_{1,2}$.

(4) Le but de cet exercice est de donner une démonstration de *Théorème de Rouché*, c'est-à-dire: soit $f, g \colon U \longrightarrow \mathbf{C}$ deux fonctions analytiques sur une partie simplement connexe U de $\mathbf{C}$ et soit $\gamma = \partial U$. Supposons que $|f(z)| > |g(z)|$ pour tout $z \in \partial U$. Alors $\mathbb{Z}(f+g) = \mathbb{Z}(f)$ dans U[1]
- ▶ Si on a $f(z) = A(z)B(z)$ alors, montrer que $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{A'(z)}{A(z)} + \frac{B'(z)}{B(z)}$.
- ▶ En déduire que étant donné f, g comme ci-dessus, on obtient $\frac{(f+g)'}{(f+g)} = \frac{f'}{f} + \frac{(1+\frac{g}{f})'}{1+\frac{g}{f}}$. <u>Indication:</u> On a $f(z) + g(z) = f(z) \cdot (1 + \frac{g(z)}{f(z)})$
- ▶ En déduire que $\mathbb{Z}(f+g) = \mathbb{Z}(f) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\gamma \frac{(1+\frac{g(z)}{f(z)})'}{1+\frac{g(z)}{f(z)}} dz$.
- ▶ Montrer que pour tout $w \in \gamma$ on a $1 + \frac{g(w)}{f(w)} \in B(1,2)$.
- ▶ En déduire que $\int_\gamma \frac{(1+\frac{g(z)}{f(z)})'}{1+\frac{g(z)}{f(z)}} dz = 0$ et conclure.

(5) Refaire Exercice 2 et Exercice 3 en utilisant l'exercice précedente, c'est-à-dire Théorème de Rouché.

(6) En utilisant Théorème de Rouche (c'est-à-direExercice 4) montrer que $f(z) = 2z^{10} + 4z^2 + 1$ et $g(z) = 2z^{10} - 4z^2 + 1$ ont 2 zéros dans $B(0,1)$. <u>Indication:</u> Noter que $|4z^2| > 2|z^{10} + 1|$ pour tout $z \in \partial B(0,1) = \{w \in \mathbf{C} \colon |z| = 1\}$.

(7) En utlisant la détermination principale (ou branche principale) de $\log(z)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$ définir la fonction $z^{1/n}$, et calculer $(\pm 2i)^{1/n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

[1] Rappeler que par $\mathbb{Z}(f,\gamma) = \mathbb{Z}(f)$ on note le nombre de zéros de f dans l'arc fermé γ avec multiplicité.