Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2015 - Deuxième Semestre – Math 325 - Théorie Des Fonctions Complexes
Examen Final, 23 Mai 2016 – Ayberk Zeytin
150 mins. Nom & Prénom: ______________ Sign: ________

Question:	1	2	3	4	5	6	Total
Points:	12	24	12	16	12	36	112
Score:							

Question 1 (12 points)

(a) (6 points) Calculer $\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz$ où γ est le cercle de rayon 1 et centre 0 orienté positivement.

(b) (6 points) En déduire que $\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)} \cos(\sin(t))dt = 2\pi$. (Indication: Écrire une parametrisation de γ et expliciter l'integrale)

Question 2 (24 points)

Soit $\mathsf{f}(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-2)}$. Déterminer la série de Laurent de f dans:

(a) (8 points) $\mathbb{D}$

(b) (8 points) $A^{0}_{1,2} = \{w \in \mathbf{C} \colon 1 < |w| < 2\}$

(c) (8 points) $A^{-1}_{0,3} = \{w \in \mathbf{C} \colon 0 < |w+1| < 3\}$

Question 3 (12 points)

Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{9 + x^4} dx$

Question 4 (16 points)

Calculer les integrales suivantes :

(a) (8 points) $\int_\gamma e^{\sin(1/z)}dz$; où γ est le cercle de centre 0 et rayon 325 orienté positivement.

(b) (8 points) $\int_\gamma \frac{(1-\cos(z))^2}{z^5}dz$; où γ est le cercle de centre 0 et rayon 325 orienté positivement.

Question 5 (12 points)

On fixe un entier naturel n et considère $f(z) = (z-1)^n e^z$. Montrer que f possede n zéros dans le disque $B(1,1)$.

Question 6 (36 points)

Décider les propositions suivantes sont vrais ou faux, si oui prouver, si non donner un contre-exemple:

(a) (6 points) $|\sin(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbf{C}$
V / F ?

(b) (6 points) Supposons que $f\colon D \longrightarrow \mathbf{C}$ est analytique et γ est un arc fermé dans D, ouverte et connexe. Alors $\int_\gamma f = 0$.
V / F ?

(c) (6 points) Soit $f\colon \mathbf{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique avec une singularité essentielle à $z_0 = 0$. Alors $\mathrm{Res}_0(f) = 0$.
V / F ?

(d) (6 points) L'équation $e^z + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbf{C}$.
V / F ?

(e) (6 points) Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ une fonction entière. Si $u(x, y)$ admet un maximum, alors f est identiquement null.
V / F ?

(f) (6 points) Soit $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction entière. Si f s'annule sur le segment $[0, 1] \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ alors f est identiquement null.
V / F ?