Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2015 - Deuxième Semestre – Math 325 - Théorie Des Fonctions Complexes
Examen Partiel 1, 23 Mars 2016 – Ayberk Zeytin
100 mins. Nom & Prénom: ______________________

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	10	19	12	20	16	77
Score:						

Question 1 (10 points)
Déterminer tout les fonctions analytiques, $f = u + iv \colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, telles que $u(x, y) = x^2 - y^2$.

Question 2 (19 points)

Décider et expliquer brièvement si les proprietès topologiques donnés sont vraies ou faux pour les parties suivantes:

(a) (5 points) $P_1 = \left\{ z = \frac{(\sqrt{-1})^{n^2}}{325n+1} \in \mathbf{C} \colon n \in \mathbf{N} \cup \{0\} \right\}$

ouvert	Oui	Non	
fermé	Oui	Non	
borné	Oui	Non	
compact	Oui	Non	
connexe	Oui	Non	

(b) (7 points) $P_2 = \left\{ z \in \mathbf{C} \colon |\arg(z-1)| \leq \frac{\pi}{4} \right\}$ (Dessiner, aussi)

ouvert	Oui	Non	
fermé	Oui	Non	
borné	Oui	Non	
compact	Oui	Non	
connexe	Oui	Non	

(c) (7 points) $P_3 = \{z \in \mathbf{C} \colon -1 < \mathrm{Im}(z) \leq 2\}$ (Dessiner, aussi)

ouvert	Oui	Non	
fermé	Oui	Non	
borné	Oui	Non	
compact	Oui	Non	
connexe	Oui	Non	

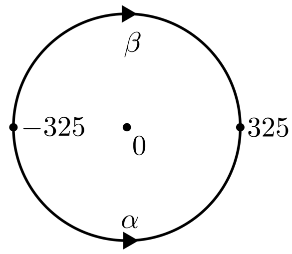
Question 3 (12 points)

Déterminer le rayon de convergence (R) des séries entières suivantes:

(a) (6 points) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^{n^2} n}{n^3 + 325} z^n$

(b) (6 points) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^2 + 2016} z^n$

Question 4 (20 points)



Soient α et β sont des arcs entre -325 et 325 indiqués dans la figure. Calculer

(a) (8 points) $\displaystyle\int_\alpha \frac{1}{z^2}dz$

(b) (8 points) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2}dz$; où γ est le cercle de centre 0 et rayon 325 dans $\mathbf{C}$.

(c) (4 points) $\displaystyle\int_\beta \frac{1}{z^2}dz$ en utilisant (i) et (ii).

Question 5 (16 points)

Soit $f\colon \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction entière et soient $f(z) = u(x, y) + \sqrt{-1}v(x, y)$. Montrer que:

(a) (8 points) s'il existe un $m \in \mathbf{R}_+$ tel que $|f(z| > m$ pour tout $z \in \mathbf{C}$ alors f est constante.

(b) (8 points) s'il existe un $M \in \mathbf{R}_+$ tel que $u(x, y) > M$ pour tout $z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbf{C}$ alors f est constante. (Indication: Poser $g(z) = e^{f(z)}$ et utiliser (i).)