Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2015 - Deuxième Semestre – Math 325 - Théorie Des Fonctions Complexes
Examen Partiel 2, 27 Avril 2016 – Ayberk Zeytin
100 mins. Nom & Prénom: ____________ Sign: ______

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	20	16	16	12	64
Score:					

Question 1 (20 points)

Déterminer les singularités des fonctions suivantes et leur type:

(a) (10 points) $\dfrac{\sin(z)}{z^3 - 2\pi z^2 + \pi^2 z}$

(b) (10 points) $\cot(z) - \dfrac{1}{z}$

Question 2 (16 points)

(a) (8 points) Soit $f \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique qui est continue sur $\partial\mathbb{D}$ telle que $f(z) = 0$ pour tout $z = e^{\theta\sqrt{-1}}$ où $\theta \in [0, 2\pi]$. Déterminer f.

(b) (8 points) Soit, maintenant, $g \colon \mathbb{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique qui est continue sur $\partial\mathbb{D}$ telle que $g(z) = 0$ pour tout $z = e^{\theta\sqrt{-1}}$ où $\theta \in [0, \pi]$. Déterminer g. (Indication: Considérer $h(z) = g(z)g(-z)$.)

Question 3 (16 points)

On définit $B(0, R) := \{z \in \mathbf{C} \colon |z| < R\}$; où $R \in \mathbf{R}_{>0}$. Soit $f \colon B(0, R) \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction analytique telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq C$ pour certain $C \in \mathbf{R}_{>0}$ et pour tout $z \in B(0, R)$.

(a) (8 points) Montrer que $|f'(0)| \leq \frac{C}{R}$

(b) (8 points) Montrer que $|f'(0)| = \frac{C}{R}$ si et seulement si il existe un $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$ tel que $f(z) = \frac{C}{R}\lambda z$ pour tout $z \in B(0, R)$.

Question 4 (12 points)

Calculer l'intégrale $I = \int_\gamma \frac{\sin(z)}{(z^2+1)(z+3)} dz$; où γ désigne le rectangle, orienté positivement et défini par les droites d'équation $x = -1$, $y = 0$, $x = 2$ et $y = 2$.