# MATH 452
# ÉNONCÉS DES EXERCICES 1

A. ZEYTİN

On suppose que $E, F$ sont espaces vectoriels sur un corps $k$. Par $F_1, F_2$ etc. on note sous-espaces vectoriels de $E$.

(1) Soit $x, y \in \mathbf{R}$. Déterminer $z, w \in \mathbf{R}$ tels que $\frac{1}{x+y\sqrt{-1}} = z + w\sqrt{-1}$. (On suppose implicitement que au moins l'un de $x$ ou $y$ est non-nul.)

(2) Décider si les parties suivantes de $k^3/k$ sont sous-espaces vectoriels:
- ▶ $\{(x_1, x_2, x_3) \in k^3 | 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0\}$
- ▶ $\{(x_1, x_2, x_3) \in k^3 | 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1\}$
- ▶ $\{(x_1, x_2, x_3) \in k^3 | 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 2\}$
- ▶ $\{(x_1, x_2, x_3) \in k^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 = 0\}$
- ▶ $\{(x_1, x_2, x_3) \in k^3 | x_2 + x_1 x_2 = 0\}$
- ▶ $\{(x_1, x_2, x_3) \in k^3 | x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$
- ▶ $\{(x_1, x_2, x_3) \in k^3 | 3x_1 = 2x_3\}$

(3) Soit $X$ une partie de $\mathbf{R}^2/\mathbf{R}$ telle que
   i. si $\vec{x}, \vec{y} \in X$ alors $\vec{x} + \vec{y} \in X$, et
   ii. si $\vec{x} \in X$ alors $-\vec{x} \in X$

pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in X$. Décider si $X$ doit être un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$. Si oui, démontrer; si non, donner une contre-exemple.

(4) Trouver une partie $X$ de $\mathbf{R}^3/\mathbf{R}$ qui satisfait:
- ▶pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\vec{x} \in X$, $\alpha\vec{x} \in X$,

mais $X$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

(5) Soient $E/k$ un espace vectoriel et $F_1, F_2$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Décider si
- ▶ $F_1 \cap F_2$, et
- ▶ $F_1 \cup F_2$

sont sous-espaces vectoriels de $E$. Si oui démontrer; si non, donner un contre-exemple.

(6) Soit $X = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ une partie linéairement indépendent d'un espace vectoriel $E/k$. Montrer que

$$\mathrm{Sp}(X) = \mathrm{Sp}(\vec{v_1}, \vec{v_2} - \vec{v_1}, \vec{v_3} - \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_{n-1}} - \vec{v_n}, \vec{v_n}).$$

(7) Soit $X = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ une partie linéairement indépendent d'un espace vectoriel $E/k$. Pour un vecteur $\vec{w} \in E$ fixé, décider si la partie

$$X + \vec{w} := \{\vec{v_1} + \vec{w}, \vec{v_2} + \vec{w}, \ldots, \vec{v_n} + \vec{w}\}$$

est linéairement indépendent.

(8) Soit $E/k$ un espace vectoriel de dimension 1. Montrer que si $\vec{v} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ alors $\mathrm{Sp}(\vec{v}) = E$.

(9) Soit $T \colon E \longrightarrow E$ une application linéaire; où $E$ est un espace vectoriel de dimension 1. Montrer qu'il existe un $\alpha_T \in k$ tel que $T(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$ pour tout $\vec{v} \in E$, c'est-à-dire toutes les applications linéaires de $E$ vers $E$ sont multiplication par un scalaire.

(10) Soit $E/k = \mathbf{R}^2/\mathbf{R}$. Donner une fonction $f \colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $f(\alpha\vec{v}) = \alpha f(\vec{v})$, mais $f$ n'est pas une application linéaire de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}$.

(11) Soit $X = \{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}\}$ une partie de $E/k$ et soit $T \colon E \longrightarrow F$ une application linéaire. Montrer que si $T$ est surjective et $\mathrm{Sp}X = E$ alors $\mathrm{Sp}(T(X)) = \mathrm{Sp}(T(\vec{v_1}), \ldots, T(\vec{v_n})) = F$.

(12) Soit $T \colon E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels et $X \subseteq E$ une partie non-vide linéairement indépendent. Démontrer par un exemple que $T(X)$ n'est pas necessairement une partie linéairement indépendent de $F$.

(13) Soit $E = \mathbf{R}^3/\mathbf{R}$.

- Montrer que $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
- Déterminer une base, $\mathcal{B}$, de $F_1$. Quelle est la dimension de $F_1$?
- Trouver un $\vec{v} \in E$ tel que $\mathcal{B} \cup \{\vec{v}\}$ est une base de $E$.
- Trouver un isomorphisme entre l'espace quotient $E/F_1$ et $\mathbf{R}$.

(14) Soit $E = \mathbf{R}^4/\mathbf{R}$.

- Montrer que $F_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
- Déterminer une base, $\mathcal{B}$, de $F_1$. Quelle est la dimension de $F_1$?
- Trouver $\vec{v}, \vec{w} \in E$ tel que $\mathcal{B} \cup \{\vec{v}, \vec{w}\}$ est une base de $E$.
- Trouver un isomorphisme entre l'espace quotient $E/F_1$ et $\mathbf{R}^2$.