MATH 452
ÉNONCÉS DES EXERCICES 2

A. ZEYTİN

(1) Supposons que τ_1 et τ_2 sont topologies sur un ensemble non-vide X. Décider si
- ▶ $\tau_1 \cup \tau_2$
- ▶ $\tau_1 \cap \tau_2$

est un topologie sur X.

(2) Soient $f\colon X \longrightarrow Y$ une fonction et $X_i \subset X$, $Y_i \subset Y$ où $i = 1, 2$. Montrer que
- ▶ si $Y_1 \subset Y_2$ alors $f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$
- ▶ $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$
- ▶ $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$
- ▶ $f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2)$
- ▶ si $X_1 \subset X_2$ alors $f(X_1) \subset f(X_2)$
- ▶ $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

(3) Soit X un ensemble non-vide. On pose τ comme l'ensemble de tout les parties, U de X, tel que soit $|X \setminus U| < \infty$ soit $X \setminus U = \emptyset$. Montrer que τ est une topologie sur X.

(4) Soit X un ensemble non-vide. On pose τ comme l'ensemble de tout les parties, U de X, tel que soit $|X \setminus U|$ est dénombrable[1] soit $X \setminus U = \emptyset$. Montrer que τ est une topologie sur X.

(5) Soit X un ensemble non-vide. Un ensemble, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, de parties de X est dit une base si:
- pour tout $x \in X$ il existe un $U \in \mathcal{B}$ contenant x, i.e. $x \in U$.
- si pour $B_1, B_2 \in \tau$ avec $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ alors, il existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Si $\mathcal{B}$ est une base alors

$$\tau(\mathcal{B}) := \{U \subset X\colon \text{pour tout } x \in U \text{ il existe } B \in \mathcal{B} \text{ avec } x \in B \subset U\}.$$

Étant donne une base $\mathcal{B}$ de X montrer que $\tau(\mathcal{B})$ est une topologie sur X. Cette topologie est dit la topologie engendré par $\mathcal{B}$.

(6) (Droite de Sorgenfrey) On considère la droite réelle $\mathbf{R}$ muni de la topologie engendré par $\mathcal{B} := \{[a, b)\colon a, b \in \mathbf{R} a < b\}$. On la note par S. Montrer que
- ▶ cette topologie sur $\mathbf{R}$ est strictement plus fine (c'est-à-dire qu'elle a strictement plus d'ouverts) que la topologie usuelle (ou standarde)
- ▶ chaque intervalle semi-ouvert $[a,)b$ est ouvert dans S, mais aussi fermé.
- ▶ une suite (x_n) dans S converge vers L si et seulement si elle approche L par la droite, c'est-à-dire si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un indice $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n > N$, $L \leq x_n < L + \epsilon$.

Donner un exemple d'une suite convergente et un exemple d'une suite divergente dans S.

(7) Déterminer la frontière, la clôture et l'intérieur des ensembles suivantes:
- ▶ $[0, 1) \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^2$
- ▶ $\{a + b\sqrt{-1} \in \mathbf{C}\colon a, b \in \mathbf{Z}\}$
- ▶ $\{a + b\sqrt{-1} \in \mathbf{C}\colon a, b \in \mathbf{Q}\}$
- ▶ $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2\colon x^2 + y^2 = 1\}$
- ▶ $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3\colon x^2 + y^2 = 1\}$

(8) Soit (X, τ) une espace topologique.
- ▶ Montrer que si X est Hausdorff alors la limite d'une suite convergente (x_n) dans X est unique.
- ▶ Montrer par un exemple que si X n'est pas Hausdorff la limite d'une suite n'est pas nécessairement unique.

---

[1] Rappeler qu'un ensemble A est dit dénombrable s'il existe un injection de A vers $\mathbf{N}$.

(9) On considère $B = B((a,b), \mathbf{R}) = \{f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbf{R} | f \text{ est bornée}\}$ muni de l'application $d\colon B \times B \longrightarrow \mathbf{R}_+$ définie par $d(f,g) = \sup_{t\in(a,b)} |f(t) - g(t)|$. Montrer que (B, d) est un espace métrique.

(10) Pour $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$), montrer que $(|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|)^2 \leq n(|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2)$.

(11) Soit (X, τ) un espace topologique. On dit que X est *separable* si X possede une partie U qui est dense et dénombrable.
- ▶ Montrer que $\mathbf{R}$ est separable.
- ▶ Montrer que $\mathbf{C}$ est separable.

(12) Soit (X, d) un espace métrique et soit (x_n) une suite convergente dans X. Montrer que (x_n) est
- ▶ bornée, et
- ▶ de Cauchy.

(13) On fixe un nombre réel $1 \leq p < \infty$. Montrer que l'espace

$$\ell^p := \left\{ (x_n)\colon x_n \in \mathbf{R} \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}, \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

est un espace complet sous la métrique

$$d_p(x_n, y_n) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

(14) Décider si $\mathbf{Z}$ muni de la métrique $d(n,m) = |n - m|$ est une espace métrique complet.

(15) Soit $\mathfrak{c} := \{(x_n)\colon x_n \in \mathbf{R}(\text{ ou } \mathbf{C}) \text{ et } (x_n) \longrightarrow x_o \in \mathbf{R}(\text{ ou } \mathbf{C})\}$.
- ▶ Montrer que $\mathfrak{c} \subset \ell^\infty$.
- ▶ Montrer que $\mathfrak{c}$ est complet. Indication: Il est suffisante de montrer que $\mathfrak{c}$ est fermé dans ℓ^∞.