MATH 452
ÉNONCÉS DES EXERCICES 4

A. ZEYTİN

(1) On considère l'application
$$\begin{array}{rcl} T\colon \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y, 3y-3x) \end{array}$$
- Montrer que T est linéaire,
- Montrer que T est ni injective ni surjective,
- Donner une base de son noyau et son image.

(2) Déterminer si les applications suivantes sont linéaires.
- $$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x-2y-2z \end{array}$$
- $$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (\dfrac{x}{x^2+y^2+1}, \dfrac{y}{x^2+y^2+1}) \end{array}$$
- $$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, 1-z) \end{array}$$
- $$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x^2y^2 \end{array}$$

Si oui,
- représenter ces applications dans les bases canoniques, et
- déterminer une base de leur noyau et image.

(3) Soit $X = \mathbf{R}[x]$ l'espace des polynômes avec coefficients dans $\mathbf{R}$. Sur X, on définit:
$$\begin{array}{rcl} T\colon X & \longrightarrow & X \\ p(x) & \mapsto & (2x+1)p(x)-(x^2+1)p'(x) \end{array}$$
- Démontrer que T est linéaire.
- Calculer $T(2x+1)$, $T(x^2+1)$, $T(x^n)$ pour $n \in \mathbf{N}$. Quels sont leur degré?
- Si le degré de $p(x)$ est n, quel est le degré de $T(p(x))$.
- Soit X_n l'ensemble de polynômes de degré au plus n, c'est-à-dire
$$X_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ : \ a_i \in \mathbf{R} \text{ pour } i = 0, 1, \ldots, n \right\}.$$
Montrer que T induit une application linéaire bijective de X_2 vers X_2.

On note $T_n : X_n \longrightarrow X_{n+1}$. Pour $n = 3, 4$:
- déterminer une base pour X_n,
- représenter T_n dans cette base,
- déterminer une base de son noyau et image.

(4) Soient $T, S\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ deux applications linéaires. Montrer que $T(\ker(S \circ T)) = \ker(S) \cap \mathrm{im}(T)$

(5) Soit $T\colon X \longrightarrow X$ une application linéaire. Montrer que
- $\ker(T) \subset \ker(T \circ T)$, et
- $\mathrm{im}(T \circ T) \subset \mathrm{im}(T)$.

(6) Montrer que les applications suivantes sont linéaires :
- $$\begin{aligned} T\colon (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty) &\longrightarrow (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty) \\ (x_1, x_2 m \dots) &\mapsto (x_2, x_3, \dots) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} T\colon (C([0,1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) &\longrightarrow (C([0,1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ f(x) &\mapsto x f(x) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} T\colon (C([0,1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) &\longrightarrow (C([0,1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ f(x) &\mapsto \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 f(x) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} T\colon (C([0,1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) &\longrightarrow (C([0,1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) \\ f(x) &\mapsto \int_0^x f(t)dt \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} T\colon (C([0,1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ f(x) &\mapsto f(1/2) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} T\colon (\ell^2, \|\cdot\|_2) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, x_2, \dots) &\mapsto \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2} x_i \end{aligned}$$

Lesquelles sont bornées?