MATH 452
ÉNONCÉS DES EXERCICES 5

A. ZEYTİN

Par $M^{n,m}(\mathbf{R})$ on note l'ensemble des matrices de taille $n \times m$ avec coefficients dans $\mathbf{R}$.

(1) Soit $X_2 = M^{2,2}(\mathbf{R})$, et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On définit

$$\begin{aligned} T \colon X &\longrightarrow X \\ M &\mapsto P^{-1}MP \end{aligned}$$

- ▶ Montrer que

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

  est une base de X_2.
- ▶ Montrer que T est un opérateur linéaire.
- ▶ Décider si T est injective. Déterminer une base de son noyau.
- ▶ Décider si T est surjective. Déterminer une base de son image.
- ▶ Déterminer la matrice de T par rapport à $\mathcal{B}_2$.

Plus généralement, pour un $n \in \mathbf{N}$ et P une matrice inversible fixé dans $X_n = M^{n,n}$ on définit:

$$\begin{aligned} T_P \colon X_n &\longrightarrow X_n \\ M &\mapsto P^{-1}MP \end{aligned}$$

- ▶ Montrer que T_P est un opérateur linéaire.
- ▶ Trouver une base, disons $\mathcal{B}_n$, de X_n.
- ▶ Trouver la matrice de T_P par rapport à la base $\mathcal{B}_n$.
- ▶ Décider si T_P est injective. Déterminer une base pour son noyau.
- ▶ Décider si T_P est surjective. Déterminer une base pour son image.

(2) Soit $X_2 = M^{2,2}(\mathbf{R})$, et $P = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. On définit

$$\begin{aligned} S \colon X &\longrightarrow X \\ M &\mapsto PM + MP \end{aligned}$$

- ▶ Montrer que S est un opérateur linéaire.
- ▶ Décider si S est injective. Déterminer une base de son noyau.
- ▶ Décider si S est surjective. Déterminer une base de son image.
- ▶ Déterminer la matrice de S par rapport à $\mathcal{B}_2$ que vous avex obtenu dans l'exercice1.

Plus généralement, pour un $n \in \mathbf{N}$ et P une matrice quelconque fixé dans $X_n = M^{n,n}$ on définit:

$$\begin{aligned} S_P \colon X_n &\longrightarrow X_n \\ M &\mapsto MP + PM \end{aligned}$$

- ▶ Montrer que S_P est un opérateur linéaire.
- ▶ Trouver la matrice de S_P par rapport à la base $\mathcal{B}_n$.
- ▶ Décider si S_P est injective. Déterminer une base pour son noyau.
- ▶ Décider si S_P est surjective. Déterminer une base pour son image.

Est-ce qu'on obtient un opérateur linéaire si on change $S'_P(M) = PM - MP$? Si oui, répetez tout les exercices pour S'_P.

(3) On fixe un $n \in \mathbf{N}$. Sur $X_n = M^{n,n}$ on définit:

$$\begin{aligned} T\colon X_n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n} &\mapsto \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}. \end{aligned}$$

- Montrer que T est une forme linéaire sur X.
- Déterminer la base dual de la base que vous avez déterminé dans l'exercice 1 ($\mathcal{B} = \mathcal{B}_n$), disons $\mathcal{B}^*$. En déduire que la dimension de $X_n^* = n^2$.
- Trouver n^2 éléments dans $\mathbf{R}$, disons $\lambda_{i,j}$, où $1 \le i, j \le n$ pour écrire T comme un combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}^*$.

(4) On peut considerer $\mathbf{C}$ comme un espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbf{C}$; on le note par $\mathbf{C}^1$. De même, on peut considerer $\mathbf{C}$ comme un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbf{R}$. On le note par $\mathbf{C}^2$. Trouver une application linéaire $T\colon \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2$ qui n'est pas une application linéaire de $\mathbf{C}^1$ vers $\mathbf{C}^1$.

(5) Soient X un espace normé sur $\mathbf{R}$ et $T \in \mathcal{L}(X, X)$. On dit que T est *nilpotent* s'il existe un $n \in \mathbf{N}$ tel que $T^n = \mathbb{O}$. Supposons qu'il existe un $x \in X \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ tels que $T(x) = \alpha x$. Montrer que $\alpha = 0$.

(6) Soient $x, y \in X$ deux éléments différents d'un espace normé X. Montrer qu'il existe une forme linéaire de X vers $\mathbf{R}$, disons f, telle que $f(x) \neq f(y)$.

(7) Montrer que $(\mathbf{R}^n)^*$ est isomorphe à $\mathbf{R}^n$ comme un espace vectoriel.