MATH 452
ÉNONCÉS DES EXERCICES 6

A. ZEYTİN

(1) Soit $X = \mathbf{R}_3[x] = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \mid a_i \in \mathbf{R} \text{ pour } i = 0,1,2,3\}$. Pour tout $i = 0,1,2,3$ on définit:

$$\begin{aligned} f_i : X &\longrightarrow \mathbf{R} \\ p(t) &\mapsto f_i(p) := p(i) \end{aligned}$$

- ▶ Pour $p_a(t) = at$, $q_b(t) = t^2 + b$, calculer $f_i(p_a)$ et $f_i(q_b)$ pour tout $i = 0,1,2,3$ où $a, b \in \mathbf{R}$.
- ▶ Montrer que f_i est une forme linéaire sur X.
- ▶ Montrer que la partie $F = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ est une base de X^*.
- ▶ Déterminer une base $E = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ de X dont base duale est F.
- ▶ Montrer que l'application $f(p) = \int_0^1 p(t)dt$ est une forme linéaire sur X.
- ▶ Écrire f comme une combinaison linéaire de F.

(2) On fixe $n \in \mathbf{N}$. Soit $X = M^{n,n}(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille $n \times n$ dont les coefficients sont dans $\mathbf{R}$. Sur X on définit:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (A, B) &\mapsto \operatorname{trace}(A^t B) \end{aligned}$$

où A^t est la transpose de A.

- ▶ Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur X.
- ▶ Si $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ (c'est-à-dire si $a_{i,j}$ sont les coefficients de A et $b_{i,j}$ sont les coefficients de B), expliciter $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en termes de $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$.
- ▶ Calculer la norme de l'identité induit par ce produit scalaire.
- ▶ Montrer que, pour toute matrice A, on a l'inégalité:

$$|\operatorname{trace}(A)| \le \sqrt{n}\sqrt{\operatorname{trace}(A^t A)}.$$

(3) Soit $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Montrer que si

- ▶ $x, y \in X$ avec $x \perp y$, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$,
- ▶ $x_1, \dots, x_n \in X$ avec $x_i \perp x_j$ pour tout $i \ne j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, alors:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$$

(4) Supposons que $x, y \in X$ avec $\|x\| = \|y\|$ où $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien.

- ▶ Montrer que $\langle x + y, x - y \rangle = 0$.
- ▶ Interpréter la situation geométriquement quand $X = \mathbf{R}^2$ muni du produit scalaire standard.

(5) Soient $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien.

- ▶ Pour $x, y \in X$, montrer que si $x \perp y$ alors x et y sont linéairement indépendent.
- ▶ Pour $x_1, \dots, x_n \in X$, montrer que si $x_i \perp x_j$ pour tout $i \ne j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, alors la partie $\{x_1, \dots, x_n\}$ est linéairement indépendent.

(6) Soit x_n une suite dans un espace préhilbertien $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ qui tend vers $x \in X$. Montrer que s'il existe un $y \in X$ tel que $x_n \perp y$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors $x \perp y$.

(7) Soit $X = C([0, 2\pi], \mathbf{R})$ muni de la fonction:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\mapsto \int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt \end{aligned}$$

Soient $x_n(t) = \cos(nt)$ et $y_n(t) = \sin(nt)$.

- ► Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur X.
- ► Calculer $\|x_n\|$ et $\|y_n\|$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
- ► Plus généralment, calculer $\langle x_n, x_m\rangle$ et $\langle y_n, y_m\rangle$ pour $n \neq m$. En déduire que $x_n \perp x_m$ et $y_n \perp y_m$ pour tout $n \neq m$.
- ► Montrer que $\langle x_n, y_m\rangle = 0$, c'est-à-dire $x_n \perp y_m$, pour tout $n, m \in \mathbf{N}$.

(8) Soit $X = C([-1,1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)dt.$$

n-ième polynôme de Legendre est défini par :

$$L_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n].$$

- ► Calculer L_0, L_1, L_2 et L_3 explicitement.
- ► Montrer que $\deg(L_n(t)) = n$.
- ► Calculer $\|L_i\|$ pour $i = 0, 1, 2, 3$.
- ► Calculer $\langle L_i, L_j\rangle$ pour $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$.
- ► Essayer de démontrer que $\langle L_i, L_j\rangle = \delta_{i,j}$. Indication: Commencer par

$$L_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\sum_{j=1}^{N}(-1)^j \frac{(2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!}t^{n-2j};$$

où $N = n/2$ si n est pair et $N = (n-1)/2$ si n est impair.