MATH 452
ÉNONCÉS DES EXERCICES 7

A. ZEYTİN

(1) Étant donné les espaces de Hilbert, $x \in X$, et parties convexes fermées Z de X suivants, calculer $\delta = \inf_{z\in Z} \|x - z\|$ et trouver $y \in Z$ qui satisfait $\delta = \|x - y\|$.
- ▶ $X = \mathbf{R}^2$, $x = (0,0) \in X$, $Z = \{(x_1, x_2) \in X \colon 2x_1 + x_2 = 5\}$
- ▶ $X = \mathbf{R}^2$, $x = (2,0)$, $Z = \{(x_1, x_2) \in X \colon x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$
- ▶ $X = \mathbf{R}^3$, $x = (0,0,0) \in X$, $Z = \{(x_1, x_2, x_3) \in X \colon x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6\}$
- ▶ $X = \mathbf{R}^3$, $x = (0,2,0)$, $Z = \{(x_1, x_2, x_3) \in X \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$

(2) Soit $X = C([0,1], \mathbf{R})$ l'espace préhilbertien de fonctions continue de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$ muni du produit scalaire usuel. Dans X on considère le sous-espace $\mathbf{R}_2[t] = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2(t) \colon a_i \in \mathbf{R}\}$.
- ▶ Trouver 3 vecteurs orthogonaux en utilisant $1, t, t^2$. <u>Indication:</u> Gram-Schmidt
- ▶ Montrer que $f(p) = p(\frac{1}{2})$, et $g(p) = \int_0^1 p(t)\cos(\pi t)dt$ sont operateurs linéaires.
- ▶ Determiner un $q(t) \in \mathbf{R}_2[x]$ tel que $f(p) = \langle p, q \rangle$.
- ▶ Determiner un $r(t) \in \mathbf{R}_2[x]$ tel que $g(p) = \langle p, r \rangle$.

(3) Soit $H = L^2([-1,1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire usuel. On définit

$$\begin{array}{rcl} f\colon H & \longrightarrow & H \\ x(t) & \longmapsto & f(x(t)) := x(0) \end{array}$$

- ▶ Montrer que f est une forme linéaire.
- ▶ Décider si f est continue.
- ▶ Est-ce qu'il existe un élément $x_o(t) \in H$ tel que $f(x) = \langle x, x_o \rangle$?

(4) Soit $H = L^2([0,1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire usuel. On définit

$$\begin{array}{rcl} T\colon H & \longrightarrow & H \\ x(t) & \longmapsto & T(x(t)) := tx(t) \end{array}$$

- ▶ Montrer que T est un operateur linéaire.
- ▶ Montrer que T est continue. Déterminer son norme.
- ▶ Montrer que T est auto-adjoint, c'est-à-dire vérifier que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \text{ pour tout } x, y \in H.$$

- ▶ Montrer que $\overline{\mathrm{im}(T)} = \ker(T)^{\perp}$.