Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2016 - Première Semestre – Math 452 - Introduction à l'Analyse Fonctionelle
Examen Final, 02 Jan. 2017 – Ayberk Zeytin
150 mins. Nom & Prénom: ____________________ Sign __________

Question:	1	2	3	Total
Points:	22	69	16	107
Score:				

Question 1 (22 points)
Soit $\mathsf{T}\colon \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{Y}$ un operateur linéaire entre deux espaces normés $(\mathsf{X}, \|\cdot\|_\mathsf{X})$ et $(\mathsf{Y}, \|\cdot\|_\mathsf{Y})$. On considère $\mathsf{X} \times \mathsf{Y}$ comme un espace normé muni de la norme

$$\|(x, y)\|_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}} = \|x\|_\mathsf{X} + \|y\|_\mathsf{Y}.$$

(a) (8 points) Montrer si X et Y sont espaces de Banach alors $\mathsf{X} \times \mathsf{Y}$ est de Banach.

(b) (6 points) Montrer que $\mathcal{G}(\mathsf{T}) := \{(x, y) \in \mathsf{X} \times \mathsf{Y} \mid y = \mathsf{T}x\}$ (c'est-à-dire le graph de T) est un sous-espace vectoriel de $\mathsf{X} \times \mathsf{Y}$.

(c) (8 points) Montrer que si T est borné, alors $\mathcal{G}(\mathsf{T})$ est fermé.

Question 2 (69 points)

Soit $\mathsf{X} = \ell_2$ l'espace de Hilbert des suites muni du produit scalaire:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathsf{X} \times \mathsf{X} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ ((x_n), (y_n)) &\mapsto \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \end{aligned}$$

On fixe une suite (α_i) des nombres réels et considère l'application linéaire définié comme:

$$\begin{aligned} \mathsf{T} : \mathsf{X} &\longrightarrow \mathsf{X} \\ (x_n) &\mapsto (\alpha_n x_n). \end{aligned}$$

(a) (6 points) Montrer que T est bien définie si et seulement si (α_n) est bornée, c'est-à-dire $\mathsf{T}(x_n) \in \ell_2$ si et seulement si $(\alpha_n) \in \ell_\infty$.

Dans la suite de l'exercice on fixe la suite $(\alpha_n) \in \ell_\infty$.

(b) (6 points) Montrer que T est continue.

(c) (8 points) Calculer la norme de T.

(d) (8 points) Déterminer l'adjoint, T^*, de T.

(e) (3 points) Pour un operateur linéaire borné $\mathsf{T}\colon \mathsf{X} \longrightarrow \mathsf{X}$, rappeler la définition d'une operateur linéaire normal, auto-adjoint et unitaire.

(f) (6 points) Pour $\alpha_n = (-1)^n$ décider si T est normal? auto-adjoint? unitaire?

(g) (6 points) Donner une base, disons $\mathcal{B}$, de X.

(h) (4 points) Decrire la base dual de $\mathcal{B}$.

(i) (4 points) Donner un sous-espace, disons Y, de X qui n'est pas fermé. (Indication: Quelle doit être la dimension Y?)

(j) (6 points) Ecrire la forme linéaire

$$\begin{aligned} f\colon X &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_n) &\longmapsto f((x_n)) := \sum_{i=1}^{452} x_i \end{aligned}$$

par rapport à la base dual de la base que vous avez trouvé dans l'exercice précedent.

(k) (6 points) Montrer que la forme linéaire f est borné directement.

(l) (6 points) Trouver une suite $(z_n) \in X$ telle que $f((x_n)) = \langle (x_n), (z_n) \rangle$. Quelle est la norme de f?

Question 3 (16 points)

Soit f une forme linéaire fixé sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel X et soit

$$\mathsf{M_f}(\gamma) = \{x \in \mathsf{X} \colon \mathsf{f}(x) \leq \gamma\};$$

où $\gamma \in \mathbf{R}$.

(a) (6 points) Montrer que $\mathsf{M_f}$ est une partie convexe.

(b) (4 points) Pour $\mathsf{X} = \mathbf{R}^2$, $\mathsf{f}(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, dessiner $\mathsf{M_f}(-1)$.

(c) (6 points) Décider si $\mathsf{M_f}(\gamma)$ est un sous-espace vectoriel de X.