**Université Galatasaray, Département de Mathématiques**
**2016 - Première Semestre – Math 452 - Introduction à l'Analyse Fonctionelle**
**Examen Partiel 1, 11 Oct. 2015 – Ayberk Zeytin**
**120 mins.** **Nom & Prénom:** ____________________

| Question: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Points: | 16 | 8 | 8 | 38 | 6 | 76 |
| Score: | | | | | | |

**Question 1** (16 points)

Soit $X = (0, \infty)$. Sur $X$ on définit $d(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.

(a) (6 points) Montrer que $d$ est une métrique sur $X$.

(b) (6 points) Décider si l'espace métrique $(X, d)$ est complet. (<u>Indication:</u> Considerer la suite $(\alpha_n) = (n)$. )

(c) (4 points) Décider s'il existe une norme sur $\mathbf{R}$ qui induit la métrique $d(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$?

**Question 2** (8 points)

Soit $(\alpha_n)$, $(\beta_n)$ deux suites dans $\mathbf{R}$ telles que la suite $(\alpha_n \beta_n)$ converge et $1 \leq \beta_m \leq 2$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $\alpha_n$ possède une sous suite convergente.

**Question 3** (8 points)

Soit $(X, d)$ un espace métrique et $C$ une partie compacte de $X$. Montrer que si $E$ est une partie fermée de $C$ alors $E$ est compacte.

**Question 4** (38 points)

Soit $(L^\infty([0,1],\mathbf{R})$ l'espace des fonctions bornées de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$.

(a) (8 points) Montrer que $(L^\infty([0,1],\mathbf{R})$ est un espace vectoriel muni de:

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t)$$

(b) (6 points) Montrer que

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

est une norme sur $(L^\infty([0,1],\mathbf{R})$.

(c) (4 points) Montrer pour tout $n \in \mathbf{N}$ la fonction $f_n(t) := nt^2$ est un élément de $L^\infty([0,1],\mathbf{R})$.

(d) (8 points) Décider si la suite $f_n$ est de Cauchy ou pas. Est-elle convergente?

(e) (4 points) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ la fonction $g_n(t) := \frac{1}{n}t^2$ est un élément de $L^\infty([0,1],\mathbf{R})$.

(f) (8 points) Montrer que la suite $g_n$ est convergente en déterminant sa limite.

(g) ( points) (Bonus) Montrer que $(\mathrm{L}^\infty([a, b], \mathbf{R}), \| \cdot \|_\infty$ est un espace de Banach.

**Question 5** (6 points)

Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ avec une métrique $d$. Supposons que $d$ satisfait

i. $d(\vec{u}, \vec{v}) = d(\vec{u} - \vec{v}, \vec{0})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in E$, et
ii. $d(\lambda\vec{u}, \vec{0}) = |\lambda| d(\vec{u}, 0)$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

Montrer que $||\vec{u}|| := d(\vec{u}, 0)$ définit une norme sur $E$.