Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2016 - Première Semestre – Math 452 - Introduction à l'Analyse Fonctionelle
Examen Partiel 2, 16 Dec. 2016 – Ayberk Zeytin
120 mins. Nom & Prénom: ______________________________

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	9	18	40	0	67
Score:					

Question 1 (9 points)
Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace norme avec:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Montrer que la fonction:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \end{aligned}$$

définit un produit scalaire sur X, donc X est un espace préhilbertien.

Question 2 (18 points)

Décider si les assertions suivantes sont vrai ou faux. Si vrai démontrer, si non expliciter par un contre-exemple.

(a) (6 points) Soit X un espace vectoriel, A et B parties convexes de X. Alors $A \cup B$ est convexe.

(b) (6 points) Soit $x, y, z \in X$; où $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle$ est un espace préhilbertien. Si $x \perp y$ et $y \perp z$ alors $x \perp z$.

(c) (6 points) Soit X un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et f, g deux formes linéaires sur X. Pour tout $x \in X$, on a $f(x)g(x) = 0$ si et seulement si $f \equiv 0$ ou $g \equiv 0$.

Question 3 (40 points)

Sur $X = \mathbf{R}_n[t] = \{p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \mid a_i \in \mathbf{R} \text{ pour } i = 0, \ldots, n\}$, muni de la norme :

$$\|p(t)\| = \|\sum_{i=0}^{n} a_i t^i\| = \sum_{i=0}^{n} |a_i|,$$

on considère les formes linéaires $f_0, \ldots, f_n$ déterminées par :

$$f_i(p) = \int_0^1 t^i p(t) dt.$$

(a) (6 points) Montrer que pour tout $i = 0, 1, \ldots, n$, f_i est une forme linéaire, donc $f_i \in X^*$.

(b) (6 points) Montrer que la famille $F = \{f_0, \ldots, f_n\}$ est linéairement indépendant. (Indication: Pour $M = \begin{pmatrix} \frac{a_0}{0+1} & \cdots & \frac{a_n}{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_0}{n+1} & \cdots & \frac{a_n}{n+n+1} \end{pmatrix}$ on a $\det(m) = 0$ si et seulement si $a_i = 0$ pour tout $0 \leq i \leq n$.)

(c) (6 points) En déduire que F est une base de X^*. Quelle est la dimension de X^* ? X ?

(d) (6 points) Montrer que l'application $\mathsf{f}(\mathsf{p}) = \mathsf{p}'(1)$ est une forme linéaire sur X.

(e) (8 points) Montrer que f est bornée, et calculer sa norme.

(f) (8 points) Déterminer une base $E = \{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ de X en termes de $n_{i,j}$ dont base duale est F; où $M^{-1} = N = (n_{i,j})$.

Question 4 (0 points)

(Bonus) Soient X, Y espaces normés. Montrer qu'il existe un opérateur linéaire borné

$$T : Y \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y)$$

qui satisfait l'assertion suivante:

si (y_n) est une suite de Cauchy dans Y alors $T(y_n)$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(X, Y)$.

(Indication: Fixer un élément $f \in X^* \setminus \{\mathbb{O}\}$.)