MATH 204
ÉNONCÉS DES EXERCICES 2

A. ZEYTİN

(1) Déterminez tout les sous-groupes de $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$. Lequels sont normaux?

(2) Pour les groupes est leurs sous-groupes suivants, déterminez tout les éléments de G/H explicitement, montrez que H est normal, et donc construissez la table de multiplication de G/H:
- ▶ $G = D_{2\cdot 5}$ et $H = \langle \sigma \rangle = \{e, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^4\}$[1]
- ▶ $G = \mathcal{A}_4$ et $H = \{(1), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$
- ▶ $G = \mathcal{S}_4$ et $H = \{(1), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$

(3) Montrez que $\mathcal{S}_n$ n'est pas un groupe abélien pour $n \geq 3$.

(4) Déterminez l'ordre des éléments suivants:
- ▶ $(1,2)(3,4) \in \mathcal{S}_6$
- ▶ $(1,2,3)(4,5,6) \in \mathcal{S}_6$
- ▶ $(1,2,3)(4,5,6,7) \in \mathcal{S}_7$
- ▶ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$

(5) Déterminez le plus grand entier naturel k tel que les groupes donnés possède un élément d'ordre k:
- ▶ D_n
- ▶ $\mathcal{S}_5$
- ▶ $\mathcal{S}_6$
- ▶ $\mathcal{S}_7$
- ▶ $\mathcal{S}_n$
- ▶ $\mathcal{A}_4$

(6) Décidez si les applications suivantes sont homomorphismes:
- ▶
$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ x &\longmapsto \lceil x \rceil \end{aligned}$$
- ▶
$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ x &\longmapsto \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$
- ▶
$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbf{R}\setminus\{0\} &\longrightarrow \mathbf{R}\setminus\{0\} \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$
- ▶
$$\begin{aligned} \varphi\colon M(n,\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ A &\longmapsto \det(A) \end{aligned}$$

(7) Soient G, G' deux groupes; où G est abélien et $\varphi\colon G \longrightarrow G'$ un homomorphisme.
- ▶ Montrez que $\mathrm{im}(\varphi)$ est un sous-groupe abélien de G'.
- ▶ En déduisez que si φ est surjectif, alors G' est un groupe abélien.

(8) Soit $F(\mathbf{R},\mathbf{R})$ l'ensemble de fonctions de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

[1] Rappelez que σ est la rotation de pentagone régulier d'angle $2\pi/5$.

- ► Montrez que $F(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est un groupe abélien sous l'addition défini par:
$$(f+g)(t) = f(t)+g(t).$$
- ► Rappelez que $(\mathbf{R},+)$ est un groupe abélien. Pour un nombre réel t_o fixé, montrez que l'application:
$$\begin{array}{rcl} \varphi_{t_o}\colon F(\mathbf{R},\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f(t) & \mapsto & f(t_o) \end{array}$$
est un homomorphisme. Est-il injectif?, surjectif? Déterminez $\ker(\varphi)$.

(9) Soit $C([0,1],\mathbf{R})$ est l'ensemble de fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbf{R}$. Montrez que
$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon C([0,1],\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(t)dt \end{array}$$
est un homomorphisme, où $\mathbf{R}$ est considéré comme un groupe sous l'addition usuelle. Est-il injectif?, surjectif? Déterminez $\ker(\varphi)$.

(10) On considère $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ comme un groupe sous l'addition. Montrez que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'application
$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \\ m & \mapsto & [m] \end{array}$$
est un homomorphisme. Est-il injectif?, surjectif? Déterminez $\ker(\varphi)$.

(11) Soit $\varphi\colon G \longrightarrow G'$ un homomorphisme et H un sous-groupe de G. Montrez que
- ► si H est un sous-groupe de G alors $\varphi(H) = \{g' \in G' \colon g' = \varphi(h) \text{ pour certain } h \in H\}$ est un sous-groupe de G'.
- ► si H' est un sous-groupe de G' alors $\varphi^{-1}(H') = \{g \in G \colon \varphi(g) \in H'\}$ est un sous-groupe de G'.

(12) Soient G un groupe quelconque, $g_o \in G$ un élément fixé de G. Montrez que l'application $\varphi\colon \mathbf{Z} \longrightarrow G$ défini par $\varphi(n) = (g_o)^n$ est un homomorphisme.

(13) Soient G, G', G'' trois groupes, $\varphi_1\colon G \longrightarrow G'$ et $\varphi_2\colon G' \longrightarrow G''$ homomorphismes. Montrez que $\varphi_2\circ\varphi_1\colon G \longrightarrow G''$ est un homomorphisme.

(14) Soit G un groupe et soit $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble d'isomorphismes de G vers G[2].
- ► En utilisant Exercice 13 montrez que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe.
- ► Pour $g_o \in G$ fixé, montrez que l'application:
$$\begin{array}{rcl} \iota_{g_o}\colon G & \longrightarrow & G \\ x & \mapsto & g_o x g_o^{-1} \end{array}$$
est un *automorphisme* de G, donc un élément de $\mathrm{Aut}(G)$.
- ► Montrez que l'application:
$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(G) \\ g & \mapsto & \iota_g \end{array}$$
est un homomorphisme.

(15) Montrez que il n'existe pas un isomorphisme entre:
- ► $(\mathbf{R},+)$ et $(\mathbf{C},+)$
- ► $(\mathbf{Q},+)$ et $(\mathbf{Z},+)$
- ► $(\mathbf{R},+)$ et $(\mathbf{Q},+)$

(16) Montrez que si $n \neq m$ alors il n'existe pas un isomorphisme entre $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{S}_m$.

(17) Soit G un groupe. Montrez que l'application $\varphi\colon G \longrightarrow G$, définie par $\varphi(x) = x^{-1}$ est un isomorphisme si et seulement si G est abélien.

[2]Un tel isomorphisme est appellé un *automorphisme* de G.