MATH 204
ÉNONCÉS DES EXERCICES 3

A. ZEYTİN

(1) Soit G un groupe qui agit sur un ensemble non-vide A.
- Si H est un sous-groupe de G, montrez que H aussi agit sur A.
- On considère l'action de $\mathcal{S}_8$ sur $A = \{1, 2, \ldots, 8\}$ par $\sigma \bullet \ell := \sigma(\ell)$. Soit $H = \langle(1, 2, 7)\rangle$. Déterminez les classes d'équivalence sous l'action de H sur A. Calculer $\mathrm{Stab}(1)$ et $\mathrm{Stab}(4)$
- Répétez l'exercice précedente pour $H = \langle(1, 3, 5, 7)\rangle$.

(2) Par $\mathbf{Z}[x_1, x_2, x_3]$ on note l'ensemble de polnômes avec coefficients dans $\mathbf{Z}$. Considérez l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_3 \times \mathbf{Z}[x_1, x_2, x_3] & \longrightarrow & \mathbf{Z}[x_1, x_2, x_3] \\ (\sigma, p(x_1, x_2, x_3)) & \mapsto & \sigma \bullet p(x_1, x_2, x_3) := p(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) \end{array}$$

Par exemple, $(1, 2) \bullet (x_1 + x_2^2 + x_3^3) = x_2 + x_1^2 + x_3^3$.
- Montrez que l'application au dessus définit une action de $\mathcal{S}_3$ sur $A = \mathbf{Z}[x_1, x_2, x_3]$.
- Déterminez $\mathrm{Stab}(x_1 + x_2)$.
- Déterminez $\mathrm{Stab}(x_1 + x_2 + x_2x_3)$.
- Déterminez $\mathrm{Fix}((1, 3, 2))$
- Déterminez la classe d'équivalence de x_1 et $\mathrm{Stab}(x_1)$.
- Déterminez la classe d'équivalence de $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ et $\mathrm{Stab}(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$.
- Cette action est-elle transitive?

(3) Par $\mathbf{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ on note l'ensemble de polnômes avec coefficients dans $\mathbf{Z}$. Considérez l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_4 \times \mathbf{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4] & \longrightarrow & \mathbf{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4] \\ (\sigma, p(x_1, x_2, x_3, x_4)) & \mapsto & \sigma \bullet p(x_1, x_2, x_3, x_4) := p(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) \end{array}$$

- Montrez que l'application au dessus définit une action de $\mathcal{S}_4$ sur $A = \mathbf{Z}[x_1, x_2, x_3, x_4]$.
- Déterminez $\mathrm{Stab}(x_1 + x_2 + x_4)$.
- Déterminez $\mathrm{Stab}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$.
- Déterminez $\mathrm{Fix}((1, 3, 2, 4))$
- Déterminez la classe d'équivalence de x_1 et $\mathrm{Stab}(x_1 + x_2)$.
- Déterminez la classe d'équivalence de $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ et $\mathrm{Stab}(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1)$.
- Cette action est-elle transitive?

(4) Soit $A = \{(i, j) \in \mathbf{Z}^2 : 1 \leq i, j \leq 3\}$, donc $|A| = 9$. On définit

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_3 \times A & \longrightarrow & A \\ (\sigma, (i, j)) & \mapsto & \sigma \bullet (i, j) = (\sigma(i), \sigma(j)) \end{array}$$

Par exemple, $(1, 2, 3) \bullet (1, 3) = ((1, 2, 3)(1), (1, 2, 3)(3)) = (2, 1)$.
- Montrez que l'application au définit donne une action de $\mathcal{S}_3$ sur A.
- Déterminez la classe d'équivalence de $(1, 1)$.
- Déterminez $\mathrm{Stab}((2, 2))$.
- Déterminez $\mathrm{Stab}((2, 3))$.
- Déterminez $\mathrm{Fix}(()(1, 3, 2))$
- Décidez si cette action est transitive.
- Est-elle fidèle.

(5) On identifie les éléments de $\mathcal{S}_3$ avec les entiers $\{1, \ldots, 6\}$ comme: $(1) \mapsto 1$, $(1, 2) \mapsto 2$, $(1, 3) \mapsto 3$, $(2, 3) \mapsto 4$, $(1, 2, 3) \mapsto 5$, $(1, 3, 2) \mapsto 6$. On considère l'action de $\mathcal{S}_3$ sur lui même par multiplication à gauche. Déterminez explicitement la représentation $\pi\colon \mathcal{S}_3 \longrightarrow \mathcal{S}_6$ induit par cette action. Est-elle fidèle.

(6) Soit $G = \mathcal{S}_4$ et $H\langle(1, 2, 3, 4)\rangle$. On considère l'action de G sur G/H (définié dans la classe).

- Déterminez $n = |G/H|$.
- En utilisant une identification entre des éléments de G/H et $\{1, 2, \ldots, n\}$ expliciter la représentation induit par l'action de G sur G/H, c'est-à-dire expliciter l'homomorphisme $\pi\colon G \longrightarrow \mathcal{S}_n$; où $n = |G/H|$.
- Est-elle fidèle.