MATH 204
ÉNONCÉS DES EXERCICES 4

A. ZEYTİN

(1) Quelle est l'implication de équation aux classes si G est un groupe abélien?

(2) Déterminez tous les termes de équation aux classes (c'est-à-dire le classes d'équivalence sous l'action de conjugation de G sur G) et vérifiez l'équation aux classes où :
- ► $G = \mathcal{S}_3 \times S_3$,
- ► $G = \mathcal{S}_4$,
- ► $G = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathcal{S}_3$,
- ► $G = \mathcal{A}_4$,
- ► $G = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathcal{A}_3$,
- ► $G = D_{2\cdot 5}$.

(3) Le but de cet exercice est expliciter l'équation aux classes pour $\mathcal{S}_n$. Donc, on considère l'action de $\mathcal{S}_n$ sur lui-même par conjugation.
- ► Soit $\sigma = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_m)$ un élément de $\mathcal{S}_n$ (donc $m \leq n$). Un tel élément est appelé un *cycle*. L'entier m est appelé le longeur de σ. Pour $\tau \in \mathcal{S}_n$ quelconque, montrez que $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1)\,\tau(a_2)\ \cdots\ \tau(a_m))$. (Notez que τ n'est pas nécessairement un cycle!)
- ► En déduisez que si σ et σ' deux cycles de longeur m alors $[\sigma] = [\sigma']$.
- ► En déduisez que si σ et τ sont produits des cycles disjoints, disons $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_r$ et $\tau = \tau_1 \dots \tau_r$, qui satisfait:

  pour tout $i = 1, 2, \dots, r$, il existe unique j tel que le longeur de σ_i est égal au longeur de τ_j

  alors $[\sigma] = [\tau]$.
- ► En utilisant les exercices précédents calculer toutes les classes d'équivalence (sous l'action de conjugation) de $\mathcal{S}_4$, $\mathcal{S}_5$ et $\mathcal{S}_6$.

(4) Déterminez le sous-groupe engendré par la partie A de G, c'est-à-dire $\langle A \rangle$, où :
- ► $A = \{12, 14\}$ dans $G = \mathbf{Z}$,
- ► $A = \{6, 8, 20, 32\}$ dans $G = \mathbf{Z}$,
- ► $A = \{13, 11\}$ dans $G = \mathbf{Z}$,
- ► $A = \{[12], [18], [30]\}$ dans $G = \mathbf{Z}/36\mathbf{Z}$,
- ► $A = \{([2], [4]), ([4], [2])\}$ dans $G = \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$,
- ► $A = \{(1\,2), (1\,2\,3\,4)\}$ dans $G = \mathcal{S}_4$,
- ► $A = \{(1\,2), (1\,2\,3\,4\,5)\}$ dans $G = \mathcal{S}_5$,
- ► $A = \{(1\,2\,3\,4), (1\,2\,4\,3)\}$ dans $G = \mathcal{S}_4$,
- ► $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ dans $G = (\mathbf{Q}_+, \cdot)$.
- ► $A = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}\}$ dans $G = (\mathbf{Q}_+, \cdot)$.
- ► $A = \{\frac{1}{p} : p$ nombre premier$\}$ dans $G = (\mathbf{Q}_+, \cdot)$.

(5) Montrez que si G est un groupe et A et B deux parties de G telles que $A \subset B$, alors $\langle A \rangle \leq \langle B \rangle$. Donnez un exemple où $A \subsetneq B$ mais $\langle A \rangle = \langle B \rangle$.

(6) Dans cet exercice on fixe $G = (\mathbf{Q}, +)$.
- ► Déterminez le sous groupe de G engendré par $A = \{3, 7\}$.
- ► Déterminez le sous groupe de G engendré par $A = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{7}\}$.
- ► Supposons que $H = \langle \{\frac{p_1}{q_1} \dots, \frac{p_r}{q_r}\} \rangle$. Montrez que H est un sous-groupe de $\langle \frac{1}{q_1 \cdot \ldots \cdot q_r} \rangle$.
- ► En déduisez que si H est un sous-groupe de G qui est engendré finiment, alors H est cyclique.
- ► En déduisez que $\mathbf{Q}$ n'est pas finiment engendré.
- ► Trouvez un sous-groupe, disons H, de G qui n'est pas cyclique et $H \neq G$.

(7) Déterminez tous les sous-groupes et leur generateurs des groupes suivants :

- $G = \mathcal{S}_3$
- $G = \mathcal{S}_4$
- $G = \mathcal{A}_3$
- $G = \mathcal{A}_4$
- $G = D_{2\cdot 4}$
- $G = D_{2\cdot 5}$