MATH 204
ÉNONCÉS DES EXERCICES 5

A. ZEYTİN

(1) Déterminez tous les homomorphismes
- de $\mathbf{Q}$ vers $\mathbf{Q}$,
- de $\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{Z}$,
- de $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$,
- de $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{Z}/14\mathbf{Z}$,
- de $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$,
- de $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{Z}$,
- de $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{Z}$; où m est un entier naturel quelconque.

(2) Montrez que $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \cong \mathcal{S}_3$.

(3) Montrez que si $m, n \in \mathbf{N}$ ne sont pas premiers entre eux, alors les groupes $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/mn\mathbf{Z}$ ne sont pas isomorphes.

(4) Soient G, G' deux groupes et $H \triangleleft G$, $H' \triangleleft G'$. Montrez que:
- $H \times H' \triangleleft G \times G'$, et
- $(G \times G')/(H \times H') \cong (G/H) \times (G/H')$.

(5) Pour
- $G = \mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$, $M = \langle [3] \rangle$ et $N = \langle [6] \rangle$,
- $G = \mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$, $M = \langle [4] \rangle$ et $N = \langle [6] \rangle$, et
- $G = \mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$, $M = \langle [8] \rangle$ et $N = \langle [3] \rangle$,

explicitez les classes d'équivalence de $G/(M \cap N)$, G/M et G/N. Donnez un isomorphisme explicitement entre $G/(M \cap N)$ et $(G/M) \times (G/N)$. Plus généralement, soient G un groupe et M, N deux sous-groupes normaux de G. Montrez que $G/(M \cap N) \cong (G/M) \times (G/N)$.

(6) Soit

$$\begin{array}{rcl} \phi\colon \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \\ [1] & \mapsto & [2] \end{array}$$

- Montrez que ϕ définit un homomorphisme de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.
- Calculer $\ker(\phi)$.
- Montrez que ϕ est surjectif.
- Explicitez le groupe $(\mathbf{Z}/12/\mathbf{Z})/\ker(\phi)$.
- Donnez explicitement l'isomorphisme $(\mathbf{Z}/12/\mathbf{Z})/\ker(\phi) \cong \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$

(7) Soit

$$\begin{array}{rcl} \psi\colon \mathbf{Z}/18\mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \\ [1] & \mapsto & [2] \end{array}$$

- Montrez que ψ définit un homomorphisme de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.
- Calculer $\ker(\psi)$.
- Déterminez l'image de ψ, c'est-à-dire $\mathrm{im}(()\psi) = \psi(\mathbf{Z}/18\mathbf{Z})$
- Explicitez le groupe $(\mathbf{Z}/12/\mathbf{Z})/\ker(\psi)$.
- Donnez explicitement l'isomorphisme $(\mathbf{Z}/18\mathbf{Z})/\ker(\psi) \cong \mathrm{im}(\psi)$.

(8) Soient $G = \mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$, $H = \langle [4] \rangle$ et $K = \langle [8] \rangle$.
- Explicitez G/H;
- Explicitez G/K;
- Explicitez H/K;

- ▶ Donnez l'isomorphisme explicitement entre $(G/K)/(H/K)$ et G/H.

(9) Soit G un groupe tel que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe cyclique. Montrez que G est abélien. Indication: Étudier le sous-groupe $\mathrm{Inn}(G)$ de $\mathrm{Aut}(G)$. Rappelez qu'un sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

(10)
- ▶ Pour $G = \mathcal{S}_3$ montrez que la fonction $\phi\colon G \longrightarrow G$ défini par $\phi(\sigma) = \sigma^{-1}$ n'est pas un homomorphisme?
- ▶ Montrez qu'un groupe G est abélien si et seulement si la fonction $\phi\colon G \longrightarrow G$ défini par $\phi(g) = g^{-1}$ est un homomorphisme.

(11) Rappelez qu'un groupe G est dit *simple* si G ne possède pas de sous groupe normal. Montrez que si G est un groupe d'ordre:
- ▶ 56
- ▶ 312
- ▶ 351
- ▶ 105
- ▶ 200
- ▶ 6545
- ▶ 1365
- ▶ 2907
- ▶ 132
- ▶ 462

alors G n'est pas simple, c'est-à-dire trouvez un sous-groupe normal d'un tel groupe.

(12) Montrez que si G est un groupe d'ordre $5 \cdot 7 \cdot 47$ alors G est abélien.

(13) Déterminez tous les groupes abéliens d'ordre:
- ▶ 30
- ▶ 60
- ▶ 576
- ▶ 1155
- ▶ 75
- ▶ 200

(14) Soit $G = \mathbf{Z}/60\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Dans G, déterminez toutes les éléments d'ordre
- ▶ 2
- ▶ 6
- ▶ 12
- ▶ 30