MATH 204
ÉNONCÉS DES EXERCICES 6

A. ZEYTİN

(1) Soient A et B deux anneux. Sur $A \times B$ on définit:

$$\begin{aligned}(a,b)+(a',b') &:= (a+a', b+b')\\ (a,b)\,(a',b') &:= (a\,a', b\,b')\end{aligned}$$

pour tout $a, a' \in A$, $b, b' \in B$. Montrez que $A \times B$ muni de ces operations binaires est un anneux. En déduissez que si $A_1, \ldots, A_N$ sont anneux, alors $A_1 \times \ldots \times A_N$ est un anneux, aussi.

(2) Déterminez tous les éléments inversibles et diviseurs de zéro des anneux suivants:
- $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$
- $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$
- $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$
- $\mathbf{Z}/27\mathbf{Z}$
- $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$; où p est un nombre premier
- $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$; où p est un nombre premier
- $\mathbf{Z}/p^3\mathbf{Z}$; où p est un nombre premier
- $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$
- $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$
- $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$
- $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/25\mathbf{Z}$

(3) Soit $C = C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) := \{f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ est une fonction continue}\}$. Sur C on définit:

$$\begin{aligned}(f+g)(t) &:= f(t)+g(t)\\ (f\,g)(t) &:= f(t)\,g(t)\end{aligned}$$

- Montrez que C est un anneu, muni de ces operations binaires.
- Pour un élément x_o de $\mathbf{R}$ fixé, montrez que l'application

$$\begin{aligned}\varphi : C &\longrightarrow \mathbf{R}\\ f &\longmapsto f(x_o)\end{aligned}$$

  est un homomorphisme de C vers $\mathbf{R}$.

(4) Déterminez tout les homomorphismes
- de $\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{Z}$
- de $\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$
- de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ vers $\mathbf{Z}$

(5) Soit $a, b \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Montrez que $(a+b)^p = a^p + b^p$. Interprétez cette équation en termes de homomorphismes.

(6) Soient A, B deux anneux. On dit que A et B sont isomorphes s'il existe un homomorphisme $\varphi : A \longrightarrow B$ qui est injectif et surjectif, c'est-à-dire une bijection. Montrez que
- $2\mathbf{Z}$ et $3\mathbf{Z}$
- $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$

ne sont pas isomorphes. Indication: Supposer qu'il existe un isomorphisme entre eux. Essayer de trouver des contradictions.

(7) Montrez que A est un anneu commutatif si et seulement si $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

(8) Soit A un anneu. Un élément $a \in A$ est dit idempotent si $a^2 = a$.
- Déterminez tous les éléments idempotents dans $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.
- Déterminez tous les éléments idempotents dans $\mathbf{Z}/20\mathbf{Z}$.

- Déterminez tous les éléments idempotents dans $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$.
- Déterminez tous les éléments idempotents dans un corps k.
- Montrez que l'ensemble de tout les éléments idempotents dans A est fermé sous multiplication.