MATH 204
ÉNONCÉS DES EXERCICES 7

A. ZEYTİN

(1) Déterminez le corps de fraction de
- $A = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$
- $A = \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$
- $A = 5\mathbf{Z}$

(2) Pour les polynômes $f(x)$ et $g(x)$ suivants déterminez $q(x)$ et $r(x)$ tels que $f(x) = g(x)q(x)+r(x)$ avec $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$:
- $f(x) = x^6 + 3x^5 + 4x^2 - 3x + 2$, $g(x) = x^2 + 2x - 3$ dans $(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})[x]$,
- $f(x) = x^6 + 3x^5 + 4x^2 - 3x + 2$, $g(x) = 3x^2 + 2x - 3$ dans $(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})[x]$,
- $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x - 5$, $g(x) = 2x = 1$ dans $(\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})[x]$,
- $f(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2$, $g(x) = 5x^2 - x + 2$ dans $(\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})[x]$,
- $f(x) =$, $g(x) =$ dans $[x]$,

(3) Étant donné le fait que les polynômes suivants admet une factorisation en produit de facteurs linéaires; détermninez cette factorisation:
- $f(x) = x^4 + 4$ dans $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[x]$
- $f(x) = x^3 + 3x + 2$ dans $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[x]$
- $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ dans $(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})[x]$
- $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x - 5$ dans $(\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})[x]$

(4) Décidez si les polynômes suivants sont irréductibles. Si oui démontrez, si non déterminez les facteurs irréductibles:
- $f(x) = x^3 + 2x + 3$ dans $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[x]$,
- $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 2$ dans $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[x]$,
- $f(x) = x^2 + x + 1$ dans $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[x]$,
- $f(x) = x^3 + x + 1$ dans $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})[x]$,
- $f(x) = x^4 + 1$ dans $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[x]$,
- $f(x) = x^2 + 8x - 2$ dans $\mathbf{Q}[x]$,
- $f(x) = x^2 + 8x - 2$ dans $\mathbf{R}[x]$.
- $f(x) = x^2 + 6x + 12$ dans $\mathbf{Q}[x]$,
- $f(x) = x^2 + 6x + 12$ dans $\mathbf{R}[x]$

(5) Montrez que le polynôme $x^4 - 2x^2 + 8x + 1$ est irréductible sur $\mathbf{Q}[x]$.

(6) Déterminez tous les polynômes irréductibles de dégre au plus 3 dans $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[x]$.

(7) Soit $f(x) = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0 \in \mathbf{Q}[x]$ un polynôme. Supposons qu'un élément $\frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$ avec $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$ est une racine de f, c'est-à-dire $f(\frac{p}{q}) = 0$. Dans ce cas, montrez que
- $p|a_0$, et
- $q|a_n$.

En déduisez que si $f(x)$ est un polynôme unitaire et si pour tous les diviseurs, disons d, de a_o on a $f(d) \neq 0$, alors $f(x)$ ne possède pas de racines dans $\mathbf{Q}$. En utilisant ce résultat décidez si les polynômes suivants ont des racines dans $\mathbf{Q}$:
- $x^4 - 2$,
- $x^6 + 2$,
- $x^3 + 204x + 1$,
- $x^3 + 2x^2 + 12$.

(8) (Critère d'Eisenstein) Soit $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbf{Q}[x]$ avec $a_i \in \mathbf{Z}$ pour tout $i = 0, 1, \ldots n-1$. Montrez que s'il existe un nombre premier p tel que $p|a_i$ pout tout $i = 0, 1, \ldots n-1$ mais $p^2 \nmid a_0$, alors $f(x)$ est irréductible sur $\mathbf{Q}[x]$.

(9) En utilisant le critère d'Eisenstein montrez que les polynômes suivants sont irréductibles:
- ▶ $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2$
- ▶ $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6$
- ▶ $f(x) = x^6 + 30x^5 - 15x^3 + 6x - 120$

(10) Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un homomorphisme des anneaux A et B. Montrez que φ est un monomorphisme si et seulement si $\ker(\varphi) = \{0\}$.

(11) Décidez si les parties des anneaux suivantes sont un idéaux:
- ▶ $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$
- ▶ $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$
- ▶ $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{C}$
- ▶ $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R}$
- ▶ $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{C}$
- ▶ $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$

(12) Trouvez un sous-anneu de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ qui n'est pas un idéal de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

(13) Soit A un anneau. Montrez que si A est un corps alors A possède deux idéaux : $\{0\}$ et A. En dédeisez que si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme d'un corps A vers un anneau B alors soit φ est injectif, soit $\varphi \equiv 0$(c'est-à-dire $\varphi(\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in A$).

(14) Soit A un anneau unitaire commutatif et $\alpha \in A$. Montrez que $\mathrm{Ann}_\alpha := \{x \in A : xa = 0\}$ est un idéal de A. Calculez $\mathrm{Ann}_\alpha \subseteq A$ où :
- ▶ $\alpha = 3 \in A = \mathbf{Z}$,
- ▶ $\alpha = 3 \in A = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$,
- ▶ $\alpha = 3 \in A = \mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$,
- ▶ $\alpha = 3 \in A = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$,
- ▶ $\alpha = 3 \in A = \mathbf{Z}[x]$,
- ▶ $\alpha = 3 \in A = (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[x]$,
- ▶ $\alpha = 3 \in A = (\mathbf{Z}/15\mathbf{Z})[x]$,
- ▶ $\alpha = 3 \in A = (\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})[x]$.

(15) Déterminez tout les idéaux maximaux et idéaux premiers de
- ▶ $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$,
- ▶ $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$,
- ▶ $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$,
- ▶ $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$.
- ▶ $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$.

(16) Soit $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.
- ▶ Trouvez un idéal maximal de A, disons $\mathfrak{m}$.
- ▶ Montrez que $\mathfrak{m}$ est un idéal premier de A.
- ▶ Trouvez un idéal premier de A qui n'est pas un idéal maximal.

(17) Soient A un anneau commutatif unitaire et I, J deux idéaux de A. Décidez si
- ▶ $I \cap J$ est un idéal de A.
- ▶ $I \cup J$ est un idéal de A.
- ▶ $IJ = \{\sum_{i=1}^n a_i b_j\}$ est un idéal de A.

(18) Soit X une partie d'un anneau commutatif unitaire A. Montrez que

$$(X) := \{\sum_{i=1}^n r_i x_i : r_i \in A \text{ et } x_i \in X\}$$

est un idéal de A. On l'appelle l'idéal engendré par X. Dans les cas suivants calculez (X) :
- ▶ $X = \{3\} \subseteq A = \mathbf{Z}$
- ▶ $X = \{12\} \subseteq A = \mathbf{Z}$

- $X = \{3, 12\} \subseteq A = \mathbf{Z}$
- $X = \{3, 9\} \subseteq A = \mathbf{Z}$
- $X = \{3, 12\} \subseteq A = \mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$
- $X = \{3, 9\} \subseteq A = \mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$
- $X = \{x\} \subseteq A = \mathbf{Z}[x]$
- $X = \{3, 9x\} \subseteq A = \mathbf{Z}[x]$

(19) Soit I un idéal d'un anneau commutatif unitaire A. Montrez que $I = A$ si et seulement si I contient un élément inversible.

(20) Soient $A = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[x]$, $f(x) = x^2 + x + 1 \in A$. Déterminez tout les éléments de $A/(f(x))$. Donnez le table d'addition et multiplication de A. Décidez si $A/(f(x))$ est un anneau intègre. Est-il un corps? Indication: Voyez Exercice 18 pour la notation

(21) Soient $A = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[x]$, $f(x) = x^3 + x + 1 \in A$. Déterminez tout les éléments de $A/(f(x))$. Donnez le table d'addition et multiplication de A. Décidez si $A/(f(x))$ est un anneau intègre. Est-il un corps?