Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2016 - Deuxième Semestre – Math 204 - Algèbre Abstraite
Examen Final, 2 Juin 2017 – Ayberk Zeytin, 135 mins.

Nom & Prénom: ______________________________ **Sign:** ____________

Question:	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Points:	6	6	12	6	16	8	24	16	94
Score:									

Question 1 (6 points)
Soit G un groupe. Montrez que si pour tout $x \in G$, $x^2 = e$ alors G est abélien. (Indication: Pour $a, b \in G$ quelconque calculez $aba^{-1}b^{-1}$. Notez que $(ab)^2 = e$.)

Question 2 (6 points)
Montrez qu'un groupe G d'ordre 200 n'est pas simple. (Indication: Rappelez qu'un group G est dit *simple* si $\{e\}$ et G sont les seuls sous-groupes distingués de G.)

Question 3 (12 points)

(a) (6 points) Determinez tout les groupes abéliens d'ordre 16.

(b) (6 points) Lequel est isomorphe à $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/24\mathbf{Z})/\langle([2],[4])\rangle$

Question 4 (6 points)

Determinez le pgcd de $f(x) = x^7 + 6x^3 + 4x + 12$ and $g(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 18$ dans $\mathbf{Q}[x]$.

Question 5 (16 points)

Soit $p(x) = x^3 + x^2 + x + 3 \in (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[x]$.

(a) (4 points) Montrez que p est irréductible.

(b) (6 points) Montrez que l'ensemble $I = \{p(x)f(x) \colon f(x) \in (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[x]\}$ est un idéal de $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[x]$.

(c) (6 points) Montrez que I est un idéal maximal de $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[x]$.

Question 6 (8 points)

Soit $f(x) = 2x + 1 \in (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})[x]$.

(a) (4 points) Determinez un inverse (multiplicatif) de f, notée par $g(x)$.

(b) (4 points) Montrez que l'inverse de f est unique.

Question 7 (24 points)

Soit A un anneau commutatif. On dit qu'un élément $a \in A$ est nilpotent s'il existe un $n \in \mathbf{N}$ tel que $a^n = 0$.

(a) (6 points) Determinez l'ensemble des éléments nilpotents dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. Est-il un idéal de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$?

(b) (6 points) Determinez tout les éléments inversibles dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. Est-ce que le groupe $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})^\times$ cyclique?

(c) (6 points) Soient $a, b \in A$ nilpotents. Montrez que $(a + b)$ est nilpotent, aussi. (Indication: Il faut trouver $N \in \mathbf{N}$ tel que $(a+b)^N = 0$.)

(d) (6 points) Montrez que l'ensemble des éléments nilpotents de A, notée par $\mathrm{Nil}(A)$, est un idéal de A.

Question 8 (16 points)

Determinez si les assertions suivantes sont vraies ou faux. Si oui démontrez, sinon donnez un contre-exemple.

(a) (4 points) $\alpha = (1\,2\,3\,5)(2\,4\,5\,6\,7)(1\,8\,7\,2)(2\,9\,4\,6) \in A_9$.

(b) (4 points) Tout les sous-groupes de $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ d'ordre 4 est cyclique.

(c) (4 points) Le groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^\times$ est cyclique.

(d) (4 points) Si A est un anneau, et $a, b, c \in A$ tels que $ab = ac$ alors $b = c$.