Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2016 - Deuxième Semestre – Math 204 - Algèbre Abstraite
Examen Partiel 1, 24 Mar. 2017 – Ayberk Zeytin
120 mins. **Nom & Prénom:** ______________________

Question:	1	2	3	Total
Points:	24	36	15	75
Score:				

Question 1 (24 points)

Soit G un groupe quelconque. Pour un sous-groupe H de G, on définit le normalisateur de H dans G, noté par $\mathsf{N}_{\mathsf{G}}(\mathsf{H})$, comme

$$\mathsf{N}_{\mathsf{G}}(\mathsf{H}) = \{g \in \mathsf{G} \colon ghg^{-1} \in \mathsf{H} \text{ pour tout } h \in \mathsf{H}\}.$$

(a) (6 points) Pour $\mathsf{G} = \mathcal{S}_3$ et $\mathsf{H} = \langle (1\,2\,3) \rangle$, calculer $\mathsf{N}_{\mathsf{G}}(\mathsf{H})$.

(b) (6 points) Pour $\mathsf{G} = \mathcal{S}_3$ et $\mathsf{H} = \langle (1\,2) \rangle$ calculer $\mathsf{N}_{\mathsf{G}}(\mathsf{H})$.

(c) (6 points) Montrer que $\mathsf{N}_{\mathsf{G}}(\mathsf{H})$ est un sous-groupe de G.

(d) (6 points) Montrer que H est un sous-groupe normal (distingué) de $\mathsf{N}_{\mathsf{G}}(\mathsf{H})$.

Question 2 (36 points)

Soient $(\mathsf{G}, \cdot)$ et $(\mathsf{G}', \cdot')$ deux groupes. On considère l'ensemble $\mathsf{H} = \mathsf{G} \times \mathsf{G}'$ muni de l'operation binaire:

$$\begin{array}{rcl} \cdot * \cdot \colon \mathsf{H} \times \mathsf{H} & \longrightarrow & \mathsf{H} \\ ((g_1, g_1'), (g_2, g_2')) & \mapsto & (g_1, g_1') * (g_2, g_2') := (g_1 \cdot g_2, g_1' \cdot' g_2') \end{array}$$

(a) (6 points) Montrer que $(\mathsf{H}, *)$ est un groupe.

(b) (6 points) Montrer que si G et G' sont groupes abéliens alors H est un groupe abélien.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $G' = G$, donc $H = G \times G$.

(c) (6 points) Montrer que $D = \{(g, g) \in H \colon g \in G\}$ est un sous-groupe de H. En déduire que si G est abélien alors D est un sous-groupe normal (distingué) de H.

(d) (6 points) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi \colon H &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 g_2^{-1} \end{aligned}$$

est un homomorphisme.

(e) (6 points) Calculer $\ker(\varphi)$ et $|\mathsf{H}/\mathsf{D}|$.

(f) (6 points) Montrer que si $\mathsf{G} = \mathcal{S}_3$, D n'est pas un sous-groupe normal (distingué) de H.

Question 3 (15 points)

Soit X un ensemble non-vide qui admet une action d'un groupe G. Décider si les assertions suivantes sont vraie ou faux:

(a) (5 points) Soient $x_1, x_2 \in X$ et $g \in G$. Si $g \bullet x_1 = g \bullet x_2$ alors $x_1 = x_2$.

V/F ?

(b) (5 points) Soient $x \in X$ et $g_1, g_2 \in G$. Si $g_1 \bullet x = g_2 \bullet x$ alors $g_1 = g_2$.

V/F ?

(c) (5 points) Soit Y une partie non-vide de X. Alors

$$\mathrm{Stab}(Y) := \{g \in G \mid g \bullet y = y \text{ pour tout } y \in Y\}$$

est un sous-groupe de G.

V/F ?