Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2016 - Deuxième Semestre – Math 204 - Algèbre Abstraite
Examen Partiel 2, 26 Avr. 2017 – Ayberk Zeytin, 120 mins.

Nom & Prénom: ______________________________ **Sign:** ____________

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	8	32	10	5	22	77
Score:						

Question 1 (8 points)

Montrez que

(a) (4 points) $(\mathbf{R}, +)$ n'est pas isomorphe à $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

(b) (4 points) $(\mathbf{Q}, +)$ n'est pas isomorphe à $(\mathbf{Q}_+, \cdot)$.

Question 2 (32 points)

Soit $\mathsf{G} = \mathcal{A}_5$. Rappelez que $n_p = |\mathrm{Syl}_p(\mathsf{G})|$; où $\mathrm{Syl}_p(\mathsf{G})$ est l'ensemble de Sylow p sous-groupes de G.

(a) (6 points) Déterminez n_3 et donnez 2 éléments de $\mathrm{Syl}_3(\mathsf{G})$.

(b) (6 points) Déterminez n_5 et donnez tous les éléments de $\mathrm{Syl}_5(\mathsf{G})$.

(c) (4 points) Considèrez la représentation de G induit par l'action par conjugaison de G sur $\mathrm{Syl}_5(\mathsf{G})$, donc on a $\pi : \mathsf{G} \longrightarrow \mathcal{S}_{n_5}$. Déterminez $\pi((2\,3\,5))$.

(d) (4 points) Déterminez $\pi((1\,4\,6))$.

(e) (12 points) Décrivez l'équation aux classes pour G, c'est-à-dire trouver les classes de conjugaison et vérifiez l'équation.

Question 3 (10 points)

Soit $\mathfrak{p}$ un nombre premier. Déterminez tous les homomorphismes de $\mathbf{Z}/\mathfrak{p}\mathbf{Z}$ vers $\mathbf{Z}/\mathfrak{p}\mathbf{Z}$. Lequels sont isomorphismes? Déterminez $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/\mathfrak{p}\mathbf{Z})$.

Question 4 (5 points)

Déterminez tous les groupes abéliens finis d'ordre $\mathfrak{p}^6$; où $\mathfrak{p}$ est un nombre premier.

Question 5 (22 points)

Soient G un groupe et N un sous-groupe normal (distingué) de G. On considère l'action de G sur N par conjugaison.

(a) (6 points) Pour $\mathsf{g} \in \mathsf{G}$ montrez que l'action d'un élément $\mathsf{g} \in \mathsf{G}$ induit un automorphisme de N, noté par φ_{g}.

(b) (6 points) Montrez donc qu'on a un homomorphisme $\phi : \mathsf{G} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathsf{N})$.

(c) (6 points) Montrez que $\ker(\phi) = C_G(N)$, où $C_G(N)$ est le centralisateur de N dans G.

(d) (4 points) En déduissez que $G/C_G(N) \cong \mathrm{Inn}(N)$.