MATH 115
ÉNONCÉS DES EXERCICES 2

A. ZEYTİN

(1) Pour $E = \{a, b, c, d\}$ écrire explicitement $\mathcal{P}(E)$.

(2) Soient A, B, C, D quatre ensembles. Montrer que :
- ▶ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- ▶ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- ▶ $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$
- ▶ $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$

(3) Soient A, B deux parties d'un ensemble E. On suppose que
- $A \cap B \neq \emptyset$,
- $A \cup B \neq E$,
- $A \not\subset B$, et
- $B \not\subset A$

On pose :
- $A_1 := A \cap B$,
- $A_2 := A \cap B^c$,
- $A_3 := B \cap A^c$, et
- $A_4 := (A \cup B)^c$.

Montrer que
- ▶ $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$, $A_3 \neq \emptyset$, $A_4 \neq \emptyset$ (ou en bref: $A_i \neq \emptyset$ pour tout $i = 1, 2, 3, 4$)
- ▶ $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i = 1, 2, 3, 4$ et pour tout $j = 1, 2, 3, 4$.
- ▶ $\cup_{i=1}^{4} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = E$.

(4) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A est inclus dans B, alors le complémentaire de B dans E est inclus dans le complémentaire de A dans E.

(5) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A et B sont disjoints, alors tout élément de E est soit dans A^c soit dans B^c.

(6) Pour A une partie d'un ensebmle E. On appelle fonction caractéristique de la partie A dans E, l'application

$$\begin{aligned} 1_A \colon E &\to \mathbf{Q} \\ a &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{si } a \in A, \\ 0, & \text{si } a \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Soient A, B deux parties de E. Parmi les fonctions suivantes décider de quels ensembles sont-elles les fonctions caractéristiques :
- ▶ $\min\{1_A, 1_B\}$
- ▶ $1_A \cdot 1_B$
- ▶ $1_A + 1_B - 1_A \cdot 1_B$
- ▶ $1_E - 1_A$
- ▶ $\max\{1_A, 1_B\}$

(7) Soient A, B, C trois ensembles tels que $A \cup B \subset B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

(8) Soient $A = \{(x, y) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \mid x + y = 1\}$ et $B = \{(t, 1 - t) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \mid t \in \mathbf{Q}\}$. Décider si $A = B$.

(9) Soient E un ensemble, A, B deux parties de E. On appelle *différence symétrique* de A et B, notée $A \Delta B$, le sous-ensemble de E :

$$A \Delta B = \{x \in A \cup B \mid x \notin A \cap B\}.$$

- ▶ Calculer $A \Delta A$, $A \Delta \emptyset$, $A \Delta E$, $A \Delta A^c$.

- Montrer que $A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$.
- Démontrer que pour tous A, B, C parties de E on a:

$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C).$$

- Démontrer que $A\Delta B = B$ si et seulement si $A = \emptyset$.