MATH 115
ÉNONCÉS DES EXERCICES 3

A. ZEYTİN

(1) Décider si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives?
- $f\colon \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ défini par : $n \mapsto 2n$
- $f\colon \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ défini par : $n \mapsto -n$
- $f\colon \mathbf{Z}^2 \longrightarrow \mathbf{Z}^2$ défini par : $(x, y) \mapsto (x - y, x + y)$
- $f\colon \mathbf{Q}^2 \longrightarrow \mathbf{Q}^2$ défini par : $(x, y) \mapsto (x - y, y - x)$
- $f\colon \mathbf{Q}^2 \to \mathbf{Q}$ défini par : $(x, y) \mapsto x + y$

(2) On définit :

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} g\colon \mathbf{N} & \to & \mathbf{N} \\ n & \mapsto & n^2 + 1 \end{array}$$

Décider si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont injectives, surjectives, bijectives?

(3) On considère :

$$\begin{array}{rcl} f\colon (\mathbf{Z}_{\geq 0})^2 & \to & \mathbf{N} \\ (n, m) & \mapsto & 2^n(2m + 1) \end{array}$$

Démontrer que f est une bijection.

(4) On considère :

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbf{Z} \times \mathbf{N} & \to & \mathbf{Q} \\ (n, m) & \mapsto & n + \dfrac{1}{m} \end{array}$$

- Démontrer que f est injective.
- Démontrer que f n'est pas surjective. <u>Indication:</u> Essayer $\frac{3}{2}$.

(5)
- Trouver une bijection de $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ vers $\mathbf{Z}$.
- En utilisant l'exercice précedent, trouver une bijection de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{Z}$.

(6) Soient A, B deux ensembles non-vides et $f\colon A \to B$ une application. Démontrer que :
- pour tout $X \in \mathcal{P}(A)$ on a $A \subset \left(f^{-1}\left(f\left(X\right)\right)\right)$.
- pour tout $Y \in \mathcal{P}(B)$ on a $\left(f\left(f^{-1}\left(Y\right)\right)\right) \subset Y$.

(7) Soient A, B deux ensembles non-vides et $F\colon A \to B$ une application. Soient $X \subset A$ et $Y \subset B$. Démontrer que :

$$f(X) \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(Y) = \emptyset \tag{1}$$

(8) Soient A, B deux ensembles non-vides et $F\colon A \to B$ une application. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i. f est injective.

ii. pour tous $X_1, X_2 \subset A$ on a $f(X_1 \cap X_2) = f(X_2) \cap f(X_2)$.

(9) Soient A, B deux ensembles non-vides et $F\colon A \to B$ une application. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i. f est bijective.

ii. pour tous $X \subset A$, on a $f(A^c) = (f(A))^c$.

(10) Soient A, B deux ensembles non-vides et $F\colon A \to B$ une application. On définit :

$$\begin{aligned} f^*\colon \mathcal{P}(B) &\to \mathcal{P}(A) \\ Y &\mapsto f^{-1}(Y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_*\colon \mathcal{P}(A) &\to \mathcal{P}(B) \\ X &\mapsto f(X) \end{aligned}$$

- Expliciter F^* et F_* pour $F\colon \{1,2,3\} \to \{a,b\}$ définie par $F(1) = F(3) = a$ et $F(2) = b$.
- Expliciter F^* et F_* pour $F\colon \{1,2,3,4\} \to \{0,1\}$ définie par $F(1) = F(3) = 1$ et $F(2) = F(4) = 0$.
- Démontrer que f_* est injective si et seulement si f est injective.
- Démontrer que f^* est injective si et seulement si f est surjective.

(11) Soient $f\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$ deux applications. Démontrer que :
- si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
- si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
- si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective.
- si $g \circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective.
- l'implication "si $g \circ f$ est injective alors g est injective" est fausse en donnant un contre-exemple.
- l'implication "si $g \circ f$ est surjective alors f est surjective" est fausse en donnant un contre-exemple.

(12) Soit A, B, C trois ensembles non-vides, $f_1, f_2\colon A \to B$ et $g\colon B \to C$ trois applications. Supposons que $g \circ f_1 = g \circ f_2$. Montrez que si g est injective alors $f_1 = f_2$. Est-ce que l'assertion est vraie si on ne supppose pas l'injectivité de g.

(13) Soit A, B, C trois ensembles non-vides, $f\colon A \to B$ et $g_1, g_2\colon B \to C$ trois applications. Supposons que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Montrez que si f est surjective alors $g_1 = g_2$. Est-ce que l'assertion est vraie si on ne supppose pas la surjectivité de f.

(14) Soit $A = [0,1]$. Donner une application $f\colon A \to A$ qui :
- est injective et surjective
- n'est pas injective et n'est pas surjective
- est injective mais n'est pas surjective
- n'est pas injective mais surjective

(15) Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ défini par $f(x) = x^2 + x - 2$.
- Déterminer $f^{-1}(\{4\})$.
- Est-ce que f est injective?
- Calculer $f([-1,1])$.
- Calculer $f^{-1}([-2,4])$.

(16) Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ défini par $f(x) = \sin(x)$. Calculer :
- $f(\{0,\pi\})$
- $f([0,\pi])$
- $f^{-1}(\{-1,1\})$.
- $f^{-1}([-1,1])$.
- $f^{-1}([-4,4])$.
- $f^{-1}([0,1])$.
- $f^{-1}([0,4])$.

(17) On définit $f\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ par $f(x) = |x|$. Calculer :
- $f(\{-1,2\})$
- $f(\{-2,-1,1,2\})$
- $f(\{\frac{-1}{2}, \frac{3}{4}\})$
- $f([-1,2])$
- $f^{-1}(\{-1,2\})$
- $f^{-1}(\{-2,-1,1,2\})$
- $f^{-1}(\{\frac{-1}{2}, \frac{3}{4}\})$

- $f^{-1}([-1,2])$

(18) En utilisant raisonnement par récurrence démontrer les assertions suivantes :
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a : $2^n > n$.
- Pour tout $n \geq 2$ on a : $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1)n = \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a : $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a : $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a : $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.
- Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a : $6|(n^3+5n)$.