MATH 115
ÉNONCÉS DES EXERCICES 4

A. ZEYTİN

(1) Décider si les relations (sur $\mathbf{R}$) suivantes sont réflexives, symétriques, anti-symétriques, transitives :
- $x\mathcal{R}y :\Leftrightarrow \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1$
- $x\mathcal{R}y :\Leftrightarrow$ s'il existe $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$ tels que $x = py^q$

(2) Sur $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ comme :

$$n \sim m :\Leftrightarrow 3|n + m$$

Décider si $\mathcal{R}$ est
- réflexive
- symétrique
- anti-symétrique
- transitive

(3) Sur $\mathbf{R}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ comme :

$$x \sim y :\Leftrightarrow |x| = |y|$$

- Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
- Expliciter les classes d'équivalence de $\sim$.
- Qu'est-ce que vous pouvez dire concernant l'ensemble $\mathbf{R}/\mathcal{R}$.

(4) Sur $\mathbf{R}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ comme :

$$x \sim y :\Leftrightarrow xe^y = ye^x$$

- Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
- Pour x fixé, déterminer le nombre d'éléments dans $[x]$.

(5) Sur $\mathbf{Z}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ comme :

$$n \sim m :\Leftrightarrow n + m \text{ est pair}$$

- Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
- Expliciter les classes d'équivalence de $\sim$.
- Qu'est-ce que vous pouvez dire concernant l'ensemble $\mathbf{Z}/\mathcal{R}$.

(6) Sur $\mathbf{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ comme :

$$(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow x = x'$$

- Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
- Expliciter les classes d'équivalence de $\sim$.
- Qu'est-ce que vous pouvez dire concernant l'ensemble $\mathbf{R}^2/\mathcal{R}$.

(7) Sur $\mathbf{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ comme :

$$(x, y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow x + y = x' + y'$$

- Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
- Expliciter les classes d'équivalence de $\sim$.
- Qu'est-ce que vous pouvez dire concernant l'ensemble $\mathbf{R}^2/\mathcal{R}$.

(8) Soit A un ensemble non-vide. Sur $\mathcal{P}(A)$ on définit la relation $\mathcal{R}$ comme :

$$X \sim Y :\Leftrightarrow X = Y \text{ ou } X = Y^c$$

- Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- Déterminer les classes d'équivalence si on prend $A = \{1, 2, 3\}$.

- ▶ Déterminer les classes d'équivalence si on prend $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

(9) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $A \neq \emptyset$ qui est réflexive et transitive. Sur A on défnit les nouvelles relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ par :

$$(a, b) \in \mathcal{S} :\Leftrightarrow ((a, b) \in \mathcal{R} \text{ et } (b, a) \in \mathcal{R}) \text{ et } (a, b) \in \mathcal{T} :\Leftrightarrow ((a, b) \in \mathcal{R} \text{ ou } (b, a) \in \mathcal{R})$$

Décider si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des relations d'équivalences.

(10) Soient A un ensemble non-vide et A_o une partie fixé de A. On définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$X \sim Y :\Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$$

- ▶ Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- ▶ Décrire la classe d'équivalence de : $\emptyset, A_o, A$.

(11) Sur $\mathbf{R}^2$ on définit la relation $\mathcal{R}$ comme :

$$(x.y) \sim (x', y') :\Leftrightarrow (x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')$$

- ▶ Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
- ▶ Décider si $\mathcal{R}$ est un ordre total ou partiel.

(12) Sur $\mathbf{N}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ comme :

$$n \sim m :\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbf{N} \text{ tel que } m = n^k$$

- ▶ Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.
- ▶ Décider si $\mathcal{R}$ est un ordre total ou partiel.

(13) Sur $(0, \infty)$ on définit la relation $\mathcal{R}$ comme :

$$x \sim y :\Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$$

Décider si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre? Si oui, est-elle total ou partiel?

(14) Soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations d'ordre total sur un ensemble A. On définit la relation
- ▶ $\mathcal{T}_1$ sur A comme : $a \sim b :\Leftrightarrow (a \sim_{\mathcal{R}}$ et $a \sim_{\mathcal{S}} b$,
- ▶ $\mathcal{T}_2$ sur A comme : $a \sim b :\Leftrightarrow (a \sim_{\mathcal{R}}$ ou $a \sim_{\mathcal{S}} b$,

Décider si $\mathcal{T}_1$ / $\mathcal{T}_2$ est une relation d'ordre. Si oui, decide si $\mathcal{T}_1$ / $\mathcal{T}_2$ est un ordre total ou partiel.

(15) On considère $(\mathbf{Q}, \leq)$. Pour les ensembles suivantes déterminer un majorant/minorant, un élément maximal/minimal, un plus grand/petit élément. une borne supérieure/inférieure.
- ▶ $X = \{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \in \mathbf{Q} \colon m, n \in \mathbf{N}\}$,
- ▶ $X = \{\frac{mn}{(m+n)^2} \in \mathbf{Q} \colon m, n \in \mathbf{N}\}$,
- ▶ $X = \{\frac{(-1)^n}{n} + 1 \in \mathbf{Q} \colon n \in NN\}$,
- ▶ $X = \{\frac{1}{n} + (-1)^n \in \mathbf{Q} \colon n \in NN\}$,
- ▶ $X = \{x \in \mathbf{Q} \colon x^2 \leq 2\}$,
- ▶ $X = \{x \in \mathbf{Q} \colon$ la partie entière est un nombre à deux chiffres$\}$,
- ▶ $X = \{x \in \mathbf{Q} \colon$ le dénominateur n'a que des chiffres 9$\}$.

(16) Soit $E = \{a, b, c, d, e, f\}$. On considère $(\mathcal{P}(E), \subset)$. Pour les ensembles suivantes déterminer (s'il existe) un majorant/minorant, un élément maximal/minimal, un plus grand/petit élément. une borne supérieure/inférieure.
- ▶ $A = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, f\}, \{b, f\}\}$
- ▶ $A = \{\{e, f\}, \{f\}, \{a, e\}\}$
- ▶ $A = \{\{c, d, e\}, E\}$
- ▶ $A = \{\{c, d\}, \{d, e\}, \{e, f\}\}$