MATH 115
ÉNONCÉS DES EXERCICES 5

A. ZEYTİN

(1) Démontrer que les ensembles suivantes ont le même cardinalité en trouvant une bijection :
- $\mathbf{R}$ et $(0, \infty)$,
- $\mathbf{R}$ et $(\sqrt{2}, \infty)$,
- $\mathbf{R}$ et $(0, 1)$,
- $P = \{n \in \mathbf{N} \colon n = 2k, \text{ où } k \in \mathbf{N}\}$ et $I = \{n \in \mathbf{N} \colon n = 2k+1, \text{ où } k \in \mathbf{N}\}$,
- $A = \{3k \in \mathbf{Z} \colon k \in \mathbf{Z}\}$ et $B = \{5k \in \mathbf{Z} \colon k \in \mathbf{Z}\}$,
- $\mathbf{N}$ et $S = \{\frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbf{Z} \colon n \in \mathbf{N}\}$,
- $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ et $C = \{(n, m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \colon n \leq m\}$.

(2) Décider si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Si vrai démontrer l'assertion, si non donner un contre-exemple.
- Il existe une bijection de $\mathbf{Q}$ vers $\mathbf{R}$.
- $\mathbf{Q}^2$ est dénombrable.
- $\mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$ est dénombrable.
- $\{0, 1\} \times \mathbf{N}$ est dénombrable.

(3) Décrire une partition de $\mathbf{Z}$ ayant 4 ensembles $A_1, \ldots, A_4$ tel que :
- A_1 est fini et A_2, A_3, A_4 sont dénombrables,
- A_1, A_2 sont finis et A_3, A_4 sont dénombrables,
- A_1, A_2, A_3 sont finis et A_4 est dénombrable.
- $A_1, \ldots, A_4$ sont dénombrables.

Est-ce qu'il existe une partition de $\mathbf{Z}$ ayant 4 ensembles tel que $|A_i| < \infty$ pour tout $i = 1, 2, 3, 4$.

(4) Démontrer que $A = \{\ln(n) \colon n \in \mathbf{N}\}$ est dénombrable.

(5) Démontrer que $B = \{(5k, -7k) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \colon k \in \mathbf{Z}\}$ est dénombrable.

(6) Démontrer que
- $\{0, 1\} \times \mathbf{R}$ est non-dénombrable.
- $\mathbf{R}^2$ est non-dénombrable.

(7) Démontrer que si A et B soient deux ensembles finis avec $|A| = |B|$ et si
- $f \colon A \to B$ est une injection alors f est bien une bijection.
- $g \colon A \to B$ est une surjection alors g est bien une bijection.

(8) Décider si l'ensemble
$$\mathcal{S} := \{(a_1, a_2, \ldots) \colon a_i \in \mathbf{Z} \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}\}$$
est dénombrable.