Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2017- Premier Semestre – Math 115 - Fondements de Mathématiques
Examen Final, 10 janvier 2018 – Ayberk Zeytin
150 mins. Nom & Prénom: ______________________

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	6	8	28	12	36	90
Score:						

Question 1 (6 points)
Soit A, B deux ensembles non-vides et soit $f\colon A \to B$ une bijection. Montrez que $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

Question 2 (8 points)

Soient $\mathsf{E}, \mathsf{F}, \mathsf{G}$ trois ensembles non-vides, $\mathsf{f}\colon \mathsf{E} \to \mathsf{F}$ et $\mathsf{g}\colon \mathsf{F} \to \mathsf{G}$ deux applications.

(a) (4 points) Démontrer que si $\mathsf{g} \circ \mathsf{f}$ est injective alors f est injective.

(b) (4 points) Démontrer que si $\mathsf{g} \circ \mathsf{f}$ est surjective alors g est surjective.

Question 3 (28 points)

Soit X un ensemble non-vide et soit $F(X, \mathbf{Q})$ l'ensemble de tous les applications de X vers $\mathbf{Q}$. Pour $f, g \in F(X, \mathbf{Q})$ on définit :

$$f \vdash g :\Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \text{ pour tout } x \in X.$$

(a) (6 points) Montrer que $\vdash$ est une relation d'ordre.

(b) (6 points) Décider si $\vdash$ est une relation d'ordre total ou partiel.

(c) (6 points) Prenons $X = \mathbf{Q}$ (donc on considère $F(\mathbf{Q}, \mathbf{Q})$). Notons que $f(x) = x^2$ est un élément de $F(\mathbf{Q}, \mathbf{Q})$. Trouver $g, h \in F(\mathbf{Q}, \mathbf{Q})$ tel que $g \vdash f \vdash h$.

(d) (6 points) Trouver $k \in F(\mathbf{Q}, \mathbf{Q})$ tel que $k \nvdash f$ et $f \nvdash k$; où $f(x) = x^2$.

(e) (4 points) Pour l'ensemble $A = \{\alpha_t(x) = t\,x \in F([0, 1], \mathbf{R}) \mid -1 \leq t \leq 1\}$ déterminer un majorant et un minorant.

Question 4 (12 points)

Soit $(\mathsf{G}, *)$ un groupe abelien fini. Écrivons $\mathsf{G} = \{e, a_1, a_2, \ldots, a_q\}$. On pose

$$c = a_1 * a_2 * \cdots * a_q.$$

(a) (6 points) Montrez que $c^2 = e$.

(b) (6 points) Vérifiez le résultat où $\mathsf{G} = \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$.

Question 5 (36 points)

Soient $\mathsf{G} = \mathfrak{S}_4$, $\mathsf{H} = \{(1), (1\,2), (3\,4), (1\,2)(3\,4)\}$ et $\mathsf{K} = \{(1), (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$.

(a) (6 points) Montrer que H est un sous-groupe de G.

(b) (6 points) Montrer que K est un sous-groupe de G.

(c) (6 points) Écrire explicitement deux éléments distincts de $\mathfrak{S}_4/\mathsf{H}$. On l'appelle g_1 et g_2

(d) (6 points) Écrire explicitement deux éléments distincts de $\mathfrak{S}_4/\mathsf{K}$. On l'appelle h_1 et h_2

(e) (6 points) Montrer que sur $\mathfrak{S}_4/\mathsf{H}$ la composition induit par $\mathfrak{S}_4$ n'est pas une operation binaire bien définié, en utilisant quelques éléments de classes g_1 et g_2.

(f) (6 points) Prenez deux éléments distinct $x_1, y_1 \in \mathsf{h}_1$ et deux éléments distincts $x_2, y_2 \in \mathsf{h}_2$. Montrez qu'on a $[x_1 \circ x_2] = [y_1 \circ y_2]$; où $[a]$ désigne la classe d'équivalence de a dans $\mathfrak{S}_4/\mathsf{K}$. Interpretez ce résultat en termes de l'operation binaire sur $\mathfrak{S}_4/\mathsf{K}$.