**Université Galatasaray, Département de Mathématiques**
**2017- Premier Semestre – Math 115 - Fondements de Mathématiques**
**Examen Partiel 1, 01 novembre 2017 – Ayberk Zeytin**
**120 mins.** **Nom & Prénom:** ______________________________

| Question: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Points: | 8 | 10 | 8 | 16 | 20 | 62 |
| Score: | | | | | | |

**Question 1** (8 points)
Soient $p, q$ deux propositions. On définit le connecteur $\oplus$ (appellé **ou exclusif**) par : $p \oplus q$ est vraie si et seulement si $p$ est vraie ou $q$ est vraie, mais pas les deux en même temps.

(a) (4 points) Écrire la table de vérité de $p \oplus q$.

(b) (4 points) Montrer que $p \oplus q \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge \overline{p})$.

**Question 2** (10 points)

Soient $A$ et $B$ deux ensembles non-vides. Montrer que $A \times B = B \times A$ si et seulement si $A = B$.

**Question 3** (8 points)

Soient $E$ un ensemble, $A, B, C$ parties de $E$. Démontrer que

$$((A \cup C) \subset (A \cup B) \text{ et } ((A \cap C) \subset (A \cap B))) \Rightarrow (C \subset B)$$

**Question 4** (16 points)

Soit $\mathsf{E}$ un ensemble, $\mathsf{A}, \mathsf{B}$ deux parties non-vides de $\mathsf{E}$. Soit l'application :

$$\begin{aligned} \mathsf{F}\colon \mathcal{P}(\mathsf{E}) &\to \mathcal{P}(\mathsf{A}) \times \mathcal{P}(\mathsf{B}) \\ \mathsf{X} &\mapsto (\mathsf{X} \cap \mathsf{A}, \mathsf{X} \cap \mathsf{B}) \end{aligned}$$

(a) (8 points) Démontrer que $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{E}$ si et seulement si $\mathsf{F}$ est injective.

(b) (8 points) Démontrer que $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$ si et seulement si $\mathsf{F}$ est surjective.

**Question 5** (20 points)

Soient $A, B$ deux ensembles non-vides, $A_1, A_2$ deux parties non-vides de $A$, $B_1, B_2$ deux parties non-vides de $B$ et $F\colon A \to B$ une application. Décider si les assertions suivantes sont vraies ou faux; si vraie démontrer, si faux donner un contre-exemple :

(a) (5 points) $F(A_1 \cup A_2) = F(A_1) \cup F(A_2)$

(b) (5 points) $F(A_1 \cap A_2) = F(A_1) \cap F(A_2)$

(c) (5 points) $F^{-1}(B_1 \cup B_2) = F^{-1}(B_1) \cup F^{-1}(B_2)$

(d) (5 points) $F^{-1}(B_1 \cap B_2) = F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2)$