Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2017- Premier Semestre – Math 115 - Fondements de Mathématiques
Examen Partiel 2, 13 décembre 2017 – Ayberk Zeytin
90 mins. **Nom & Prénom:** ____________________

Question:	1	2	3	4	5	6	7	Total
Points:	8	10	10	8	6	8	8	58
Score:								

Question 1 (8 points)
Soit R une relation sur un ensemble non-vide A. On définit

$$\text{relation inverse de } R : R^{-1} = \{(b,a) \in A \times A \colon (a,b) \in R\}.$$

(a) (4 points) Déterminer 4 relations binaires distinctes, R_i, $i = 1,2,3,4$ sur A telles que $R_i = R_i^{-1}$ pour $i = 1,2,3,4$.

(b) (4 points) Vrai ou faux: Si R est une relation binaire sur A telle que $R = R^{-1}$, alors R est une relation d'équivalence.

Question 2 (10 points)

Soit A un ensemble non-vide et R une relation sur A. Décider si les assertions suivantes sont vraies ou faux; si vraie démontrer, si faux donner un contre-exemple :

(a) (5 points) Si R est symétrique et transitive alors R est nécessairement reflexive.

(b) (5 points) Si R est reflexive et transitive alors R est nécessairement symétrique.

Question 3 (10 points)

On dit que R est circulaire si $(a, b) \in \mathsf{R}$ et $(b, c) \in \mathsf{R}$ alors $(c, a) \in \mathsf{R}$.

(a) (4 points) On pose $\mathsf{A} = \{1, 2, 3\}$. Déterminer tout les éléments, disons (a, b), de $\mathsf{A} \times \mathsf{A}$ tel que la relation $\mathsf{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2)\} \cup \{(a, b)\}$ est une relation circulaire.

(b) (6 points) Soit A un ensemble non-vide quelconque et R une relation sur A. Montrer que R est une relation d'équivalence si et seulement si R est réflexive et circulaire.

Question 4 (8 points)

Soit $A = \{3, 5, 9, 15, 24, 45\}$. On considère la relation d'ordre partiel : $a \preccurlyeq b :\Leftrightarrow a|b$.

(a) (2 points) S'ils existent déterminer les éléments minimaux et maximaux de A.

(b) (2 points) S'ils existent déterminer un majorant et un minorant de $\{9, 5, 15\}$.

(c) (2 points) S'ils existent déterminer un plus grand et un plus petit élément de $\{3, 9, 15\}$.

(d) (2 points) Si elles existent déterminer une borne supérieure et une borne inférieure de $\{3, 9, 15\}$.

Question 5 (6 points)

Montrer que pour $K \in \mathbf{N}$ on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{K+1}$.

Question 6 (8 points)

Soient A, B deux ensembles dénombrables. Montrer que $A \cup B$ est dénombrable, aussi.

Question 7 (8 points)

Déterminer une bijection entre $(1, 2) \subset \mathbf{R}$ et $(1, \infty) \subset \mathbf{R}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{Z}$ existe une biljection entre $(n, n + 1)$ et $(1, \infty)$.