MATH 204
ÉNONCÉS DES EXERCICES 1

A. ZEYTİN

Dans cette feuille X est un ensemble non-vide et $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble de parties de X.

(1) Déterminez si les operations binaires suivantes sont associative, commutative? Déterminez l'élément neutre de l'operation binaires s'il existe.

- $$\begin{aligned} *\colon \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ (x,y) &\mapsto x*y := x-y \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} *\colon \mathbf{Q}\times\mathbf{Q} &\longrightarrow \mathbf{Q} \\ (x,y) &\mapsto x*y := xy+2 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} *\colon \mathbf{Q}\times\mathbf{Q} &\longrightarrow \mathbf{Q} \\ (x,y) &\mapsto x*y := \frac{xy}{2} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} *\colon \mathbf{Z}_+\times\mathbf{Z}_+ &\longrightarrow \mathbf{Z}_+ \\ (x,y) &\mapsto x*y := \exp(xy) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} *\colon \mathbf{Z}_+\times\mathbf{Z}_+ &\longrightarrow \mathbf{Z}_+ \\ (x,y) &\mapsto x*y := \exp(x) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} *\colon \mathbf{Z}_+\times\mathbf{Z}_+ &\longrightarrow \mathbf{Z}_+ \\ (x,y) &\mapsto x*y := x^y \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} *\colon \mathcal{P}(G)\times\mathcal{P}(G) &\longrightarrow \mathcal{P}(G) \\ (X,Y) &\mapsto X*Y := X\setminus Y \end{aligned}$$

(2) Soit $X=\{a,b\}$ et soit $*$ une operation binaire quelconque sur X.
- Déterminez tout les operations binaires sur X. Combien-est-il?
- Lesquelles sont associatives? commutatives?
- Lesquelles possède l'élément neutre?

(3) Montrer que $(\mathbf{Q}_{>0}, *)$ est un groupe; où $x*y := \frac{xy}{2}$.

(4) Montrer que $(\mathbf{R}\setminus\{-1\}, *)$ est un groupe; où $x*y := x+y+xy$

(5) Ecrire la table de multiplication de $\mathfrak{S}_3$ et $D_{2\cdot 4}$.

(6) Soit $\sigma = (1\,2\,5\,6\,4)$, $\tau = (\,1\,3)(2\,4\,7\,5)$ et $\mu = (1\,5\,4)(7\,6)$. Calculer :
- $\sigma\tau$
- $\tau\sigma$
- τ^2
- τ^3
- τ^4
- $\tau^{-1}\sigma$

- $\sigma^2\mu$
- $\mu^{-1}\tau^2$

(7) Décider si les applications suivantes appartiennent à $\mathfrak{S}(\mathbf{R})$:
- $f(x) = \sin(x)$
- $f(x) = \arctan(x)$
- $f(x) = x^2$
- $f(x) = -x^3$

(8) Soit $\sigma = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_k)$ un cycle. Dans ce cas on dit que k est le longeur de σ. Par exemple $(1\,2\,3)$ est un cycle de longeur 3.
- Considerons le cycle $s = (1\,3\,2\,4\,6\,5)$. Dans l'ensemble $\{\sigma^n : n \in \mathbf{Z}\}$ déterminer tout les cycles qui sont aussi de longeur 6.
- Repeter l'exercice précedent pour le cycle $t = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8)$.

(9) Soit $D_{2\cdot n}$ le groupe diédral qui est présenté comme :

$$D_{2\cdot n} = \langle \sigma, \rho \,|\, \sigma^2 = e,\ \rho^n = e,\ \sigma\rho\sigma = \rho^{n-1} \rangle.$$

Écrire les mots suivantes dans la forme $\sigma^{0,1}\rho^k$ pour certain $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ dans les groupe indiqué :
- $\sigma\rho^4\sigma\rho^2\sigma$, dans $D_{2\cdot 5}$
- $\sigma\rho^4\sigma\rho^2\sigma$, dans $D_{2\cdot 6}$
- $\rho^3\sigma\rho^2\sigma\rho^5$, dans $D_{2\cdot 6}$
- $\rho^3\sigma\rho^2\sigma\rho^5$, dans $D_{2\cdot 7}$
- $\rho^2\sigma\rho^3\sigma\rho^2$, dans $D_{2\cdot 7}$
- $\rho^2\sigma\rho^3\sigma\rho^2$, dans $D_{2\cdot 8}$