MATH 204
ÉNONCÉS DES EXERCICES 2

A. ZEYTİN

(1) Déterminer l'ordre des éléments suivants dans les groupes indiques :
- ▶ $\sigma\rho^2\sigma$ dans $G = D_{2\cdot 5}$
- ▶ $\sigma\rho^2\sigma$ dans $G = D_{2\cdot 6}$
- ▶ $\sigma\rho^2\sigma$ dans $G = D_{2\cdot 7}$
- ▶ $(1\,2\,4)(5\,7)(3\,6)$ dans $G = \mathfrak{S}_7$
- ▶ $(1\,2\,4)(5\,7)(3\,6)$ dans $G = \mathfrak{S}_8$
- ▶ $(1\,3)(2\,4\,6)(5\,7\,8)$ dans $G = \mathfrak{S}_8$

(2) Déterminer (s'ils existent) tout les éléments d'ordre finis dans
- ▶ $(\mathbf{Z}, +)$,
- ▶ $(\mathbf{R}, +)$,
- ▶ $(\mathbf{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$,
- ▶ $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

(3) Soit $(A, *_A)$ et $(B, *_B)$ deux groupes et $G = A \times B$. Sur G on définit :

$$*\colon G \times G \to G \tag{1}$$
$$((a, b), (a', b')) \mapsto (a *_A a', b *_B b') \tag{2}$$

- ▶ Montrer que G est un groupe.
- ▶ Montrer que l'application $\pi_1 \colon G \to A$ définié par $\pi_1(a, b) = a$ est un homomorphisme. Est-il injectif? surjectif?
- ▶ Montrer que l'application $\pi_2 \colon G \to B$ définié par $\pi_1(a, b) = b$ est un homomorphisme. Est-il injectif? surjectif?
- ▶ Montrer que G est abélien si A et B sont groupes abéliens.
- ▶ Définir une operation binaire $*'$ sur $G' = B \times A$ sous laquelle G' est un groupe.
- ▶ Montrer que les groupes G et G' sont isomorphes, c'est-à-dire trouver un homomorphisme de G vers G' qui est bijectif.

(4) Montrer que les groupes additives
- ▶ $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$ ne sont pas isomorphes, et
- ▶ $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$ ne sont pas isomorphes.

(5) Montrer que les groupes $D_{2\cdot 12}$ et $\mathfrak{S}_4$ ne sont pas isomorphes.

(6) Montrer que les groupes $D_{2\cdot 3}$ et $\mathfrak{S}_3$ sont isomorphes.

(7) Soit G un group. Montrer que l'application $\varphi \colon G \to G$ définié par :
- ▶ $\varphi(g) = g^{-1}$ est un homomorphisme si et seulement si G est abélien. Est-il injectif? surjectif?
- ▶ $\varphi(g) = g^2$ est un homomorphisme si et seulement si G est abélien. Est-il injectif? surjectif?

(8) Soit $\gamma_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
- ▶ Décrire géométriquement l'application induit par γ_θ sur $\mathbf{R}^2$ (c'est-à-dire si $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ alors $\gamma_\theta(x, y) = (\gamma_\theta \cdot (x\,y)^t)^t$).
- ▶ Décrire géométriquement l'application induit par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $\mathbf{R}^2$.
- ▶ Calculer $\gamma_\theta \gamma_{\theta'}$.
- ▶ En utilisant l'exercice précedent déterminer l'ordre de $\gamma_{2\pi/n}$ où $n \in \mathbf{N}$.
- ▶ Montrer que $\gamma_\theta \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$.

- ► Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$.
- ► On définit $\varphi\colon D_{2\cdot n} \to \mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$ induit par $\varphi(\rho) = \gamma_{2\pi/n}$ et $\varphi(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est un monomorphisme.

(9) Un isomorphisme de un groupe G vers lui-même est dit un automorphisme de G. Déterminer tout les automorphismes de :
- ► $\mathfrak{S}_3$
- ► $D_{2\cdot 4}$

(10) Décider si les parties indiquées sont sous-groupes des groupes indiqués :
- ► $\{1, \rho, \rho^2, \rho^3\}$ dans $D_{2\cdot 3}$,
- ► $\{1, \rho, \rho^2, \rho^3\}$ dans $D_{2\cdot 4}$,
- ► $\{1, \rho, \rho^2, \rho^3\}$ dans $D_{2\cdot 5}$,
- ► $\{1, \sigma\rho, \sigma\rho^2, \sigma\rho^3\}$ dans $D_{2\cdot 4}$,
- ► $\{(1), (1\,3), (2\,4), (1\,3)(2\,4)\}$ dans $\mathfrak{S}_4$,
- ► $\{(1), (1\,3)(2\,4)\}$ dans $\mathfrak{S}_4$,
- ► $\{(1), (2\,4\,6), (2\,6\,4)\}$ dans $\mathfrak{S}_6$,
- ► $\{(1), (2\,4\,6)\}$ dans $\mathfrak{S}_6$,
- ► $\{\gamma = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{R}) \mid \det(\gamma) = 1\}$ dans $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$,
- ► $\{\gamma = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{R}) \mid \det(\gamma) = -1\}$ dans $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$,
- ► $\{\gamma = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{R}) \mid \det(\gamma) = \pm 1\}$ dans $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$

(11) Déterminer le sous-groupe cyclique engrendré par $g \in G$ où :
- ► $g = (1\,2\,3\,4)$ dans $G = \mathfrak{S}_4$,
- ► $g = (1\,3)(2\,4\,5\,6)$ dans $G = \mathfrak{S}_6$,
- ► $g = \rho$ dans $G = D_{2\cdot 5}$,
- ► $g = \sigma\rho$ dans $G = D_{2\cdot 5}$,
- ► $g = \rho_2$ dans $G = D_{2\cdot 5}$,
- ► $g = \rho_2$ dans $G = D_{2\cdot 6}$,

(12) Déterminer le sous-groupe cyclique engrendré par $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$ où :
- ► $g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- ► $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- ► $g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(13) Calculer les centrilizateurs suivants :
- ► $C_G(g)$; où $g = (1\,2\,3\,4) \in G = \mathfrak{S}_4$
- ► $C_G(g)$; où $g = (1\,3)(2\,4) \in G = \mathfrak{S}_4$
- ► $C_G(g)$; où $g = \sigma \in G = D_{2\cdot 4}$
- ► $C_G(g)$; où $g = \rho \in G = D_{2\cdot 4}$

(14) Pour les groupe G et leur sous-groupe H, déterminer l'ensemble G/H et décider si H est un sous-groupe distingué où :
- ► $G = D_{2\cdot 5}$, $H = \langle \rho \rangle$
- ► $G = D_{2\cdot 6}$, $H = \langle \sigma\rho \rangle$
- ► $G = \mathfrak{S}_4$, $H = \langle (1\,2\,3\,4) \rangle$
- ► $G = \mathfrak{S}_4$, $H = \{(1), (1\,3), (2\,4), (1\,3)(2\,4)\}$
- ► $G = \mathfrak{S}_4$, $H = \langle (1), (1\,2), (1\,3), (2\,3), (1\,2\,3), (1\,3\,2) \rangle$