MATH 204
ÉNONCÉS DES EXERCICES 3

A. ZEYTİN

(1) On fixe $a, b \in \mathbf{R}$, et définit

$$\begin{aligned}\varphi_{a,b}\colon \mathbf{R}^2 &\to \mathbf{R}\\ (x,y) &\mapsto ax+by\end{aligned}$$

- ▶ Montrer que $\varphi_{a,b}$ est un homomorphisme pour tout $a, b \in \mathbf{R}$.
- ▶ Montrer que $\varphi_{a,b}$ est surjective si $(a,b) \neq (0,0)$.
- ▶ Déterminer $\ker(\varphi_{a,b})$ quand $(a,b) \neq (0,0)$.

(2) On définit

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbf{R}^\times &\to \{\pm 1\}\\ &\mapsto \frac{x}{|x|}\end{aligned}$$

- ▶ Montrer que φ est un homomorphisme.
- ▶ Montrer que φ est surjective.
- ▶ Déterminer $\ker(\varphi)$.

(3) Soit $G = D_{2\cdot 8}$ et $H = \langle \rho^4 \rangle$.
- ▶ Montrer que H est un sous-groupe distingué de G.
- ▶ Déterminer l'ordre du groupe G/H.
- ▶ Déterminer l'ordre de tout les éléments de G/H.

(4) Déterminer tout les sous-groupes distingués de $D_{2\cdot 4}$.

(5) Soient k, n deux entiers naturels avec $k|n$, c'est-à-dire il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que $kd = n$.
- ▶ Montrer que $\langle \rho^k \rangle$ est un sous-groupe distingué de $D_{2\cdot n}$.
- ▶ Montrer que $D_{2\cdot n}/\langle \rho^k \rangle \cong D_{2\cdot k}$.

(6) Soit G un groupe quelconque et $Z(G)$ le centre de G.
- ▶ Montrer que si le groupe $G/Z(G)$ est cyclique, disons $G/Z(G) = \langle [x] \rangle$, alors pour $g \in G$ quelconque il existe $a \in \mathbf{Z}$ et $z \in Z(G)$ tels que $g = x^a z$.
- ▶ En déduire que G est abélien.

(7) Soit G un groupe quelconque.
- ▶ Montrer que $D = \{(g,g) \in G \times G \,|\, g \in G\}$ est un sous-groupe de $G \times G$. (D est dit sous-groupe diagonal, pourquoi?)
- ▶ Montrer que si $G = \mathfrak{S}_3$ alors G n'est pas un sous-groupe distingué de $G \times G$.

(8) Soit G un groupe et $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble d'automorphisms de G, c'est-à-dire $\mathrm{Aut}(G) := \{\varphi\colon G \to G \,|\, \varphi \text{ est un isomorphisme.}\}$.
- ▶ Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un groupe sous la composition.
- ▶ Déterminer les groupes $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})$, $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})$, $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})$.
- ▶ Pour $g_o \in G$ fixé on définit :

$$\begin{aligned}\varphi_{g_o}\colon G &\to G\\ g &\mapsto g_o\, g\, g_o^{-1}\end{aligned}$$

  Montrer que φ_{g_o} est un isomorphisme de G vers G, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{Aut}(G)$.
- ▶ Montrer que

$$\begin{aligned}\pi\colon G &\to \mathrm{Aut}(G)\\ g_o &\mapsto \varphi_{g_o}\end{aligned}$$

est un homoorphisme avec $\ker(\pi) = Z(G)$.

- Pour $G = \mathfrak{S}_3$, $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$ expliciter l'homomorphisme π.
- Montrer que l'image de π, c'est-à-dire $\pi(G)$, est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}(G)$, notée par $\mathrm{Inn}(G)$.

(9) Soit G un groupe et H est un sous-groupe de G. Montrer que si $|G|/|H| = 2$ alors H est un sous-groupe distingué de G.