MATH 204
ÉNONCÉS DES EXERCICES 4

A. ZEYTİN

(1) Soit X un ensemble non-vide et G un groupe qui agit sur X. Soit $x, y \in X$ quelconque.
- ▶ Montrer que s'il existe un $g \in G$ tel que $y = g \bullet x$ alors $\mathrm{Stab}_G(y) = g\mathrm{Stab}_G(x)g^{-1}$; où $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \in G \mid h \in H\}$.
- ▶ En déduire que si $y = g \bullet x$ alors $|\mathrm{Stab}_G(x)| = |\mathrm{Stab}_G(y)|$.

(2) Soit $X = \{(i, j) \mid 1 \leq 1 \leq i, j \leq 3\}$ et soit $G = \mathfrak{S}_3$. Sur X on définit :

$$\bullet\colon G \times X \to X$$
$$(\sigma, (i, j)) \mapsto \sigma \bullet (i, j) := (\sigma(i), \sigma(j))$$

Par exemple, si $\sigma = (1\,2)$ et $(i, j) = (3, 1)$, $\sigma \bullet (3, 1) = (3, 2)$.
- ▶ Montrer que $\bullet$ définit une action de G sur X.
- ▶ Déterminer $\mathrm{Stab}_G(x)$ pour chaque $x \in \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.
- ▶ Déterminer $[x]$ pour chaque $x \in \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$; où $[x]$ désigne la classe d'équivalence de x dans X (par rapport à la relation d'équivalence induit par l'action de G sur X.)
- ▶ Pour chaque $x \in \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$ verifier l'égalité $|[x]| = |G|/|\mathrm{Stab}_G(x)|$.
- ▶ Déterminer explicitement la représentation symmétrique induit par cette action :

$$\pi\colon G \to \mathfrak{S}_9$$

  c'est-à-dire déterminer les images de tout les éléments.
- • Déterminer $\ker(\pi)$.

(3) Soit $X = \mathbf{R}^4$ et $G = \mathfrak{S}_4$. Sur X, on définit :

$$\bullet\colon G \times X \to X$$
$$(\sigma, (x_1, x_2, x_3, x_4)) \mapsto \sigma \bullet (x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)})$$

Par exemple $(1\,2)(3\,4) \bullet (0, 1, 2, 3) = (1, 0, 3, 2)$.
- ▶ Montrer que $\bullet$ définit une action de G sur X.
- ▶ Déterminer $\mathrm{Stab}_G(x)$ pour chaque $x \in \{(1, 2, 3, 4), (1, 1, 2, 3), (1, 1, 2, 2), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1)\}$.
- ▶ Déterminer $[x]$ pour chaque $x \in \{(1, 2, 3, 4), (1, 1, 2, 3), (1, 1, 2, 2), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1)\}$; où $[x]$ désigne la classe d'équivalence de x dans X (par rapport à la relation d'équivalence induit par l'action de G sur X.)

(4) Soit $G = \mathfrak{S}_4$ et $H = \{(1), (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$.
- ▶ Montrer que H est un sous-groupe distingué de G.
- ▶ Déterminer explicitement l'ensemble G/H.
- ▶ Dans la suite de l'exercice on considère l'action de multiplication à gauche G sur G/H :

$$\bullet\colon G \times G/H \to G/H$$
$$(g, [x]) \mapsto g \bullet [x] := [g \circ x];$$

  où $[x]$ désigne la classe d'équivalence d'un élément x dans G/H. Déterminer $\mathrm{Stab}_G([x])$ pour chaque $[x] \in \{[(1\,2)], [(1\,2\,3)], [(1\,2\,3\,4)]\}$.
- ▶ Déterminer $\{[x]\}$ pour chaque $[x] \in \{[(1\,2)], [(1\,2\,3)], [(1\,2\,3\,4)]\}$; où $\{[x]\}$ désigne la classe d'équivalence de $[x]$ dans G/H (par rapport à la relation d'équivalence induit par l'action de G sur G/H.)
- ▶ Pour chaque $[x] \in \{[(1\,2)], [(1\,2\,3)], [(1\,2\,3\,4)]\}$ verifier l'égalité $|\{[x]\}| = |G|/|\mathrm{Stab}_G([x])|$.
- ▶ Déterminer explicitement la représentation symmétrique induit par cette action :

$$\pi\colon G \to \mathfrak{S}_6$$

c'est-à-dire déterminer les images de tout les éléments.

- Déterminer $\ker(\pi)$.
- Répetez les exercices en considerant l'action de G sur G/H par multiplication à drotie :

$$\begin{aligned}\bullet\colon G \times G/H &\to G/H\\ (g,[x]) &\mapsto g \bullet [x] := [x \circ g];\end{aligned}$$

(5) Soit $G = \mathfrak{S}_4$ et $H = \{(1), (1\,2\,3\,4), (1\,3)(2\,4), (4\,3\,2\,1)\}$.

- ▶ Montrer que H est un sous-groupe de G. Décider si H est distingué.
- ▶ Déterminer explicitement l'ensemble G/H.
- ▶ Dans la suite de l'exercice on considère l'action de multiplication à gauche G sur G/H :

$$\begin{aligned}\bullet\colon G \times G/H &\to G/H\\ (g,[x]) &\mapsto g \bullet [x] := [g \circ x];\end{aligned}$$

  où $[x]$ désigne la classe d'équivalence d'un élément x dans G/H. Déterminer $\mathrm{Stab}_G([x])$ pour chaque $[x] \in \{[(1\,2)], [(1\,2\,3)], [(1\,2\,3\,4)]\}$.
- ▶ Déterminer $\{[x]\}$ pour chaque $[x] \in \{[(1\,2)], [(1\,2\,3)], [(1\,2\,3\,4)]\}$; où $\{[x]\}$ désigne la classe d'équivalence de $[x]$ dans G/H (par rapport à la relation d'équivalence induit par l'action de G sur G/H.)
- ▶ Pour chaque $[x] \in \{[(1\,2)], [(1\,2\,3)], [(1\,2\,3\,4)]\}$ verifier l'égalité $|\{[x]\}| = |G|/|\mathrm{Stab}_G([x])|$.
- ▶ Déterminer explicitement la représentation symmétrique induit par cette action :

$$\pi\colon G \to \mathfrak{S}_6$$

  c'est-à-dire déterminer les images de tout les éléments.
- Déterminer $\ker(\pi)$.
- Répetez les exercices en considerant l'action de G sur G/H par multiplication à drotie :

$$\begin{aligned}\bullet\colon G \times G/H &\to G/H\\ (g,[x]) &\mapsto g \bullet [x] := [x \circ g];\end{aligned}$$

(6) Soit $G = D_{2\cdot 4}$ et $H = \langle \sigma \rangle$.

- ▶ Montrer que H est un sous-groupe de G. Décider si H est distingué.
- ▶ Déterminer explicitement l'ensemble G/H.
- ▶ On considère l'action de multiplication à gauche G sur G/H :

$$\begin{aligned}\bullet\colon G \times G/H &\to G/H\\ (g,[x]) &\mapsto g \bullet [x] := [g \cdot x];\end{aligned}$$

  où $[x]$ désigne la classe d'équivalence d'un élément x dans G/H.
- ▶ Déterminer $\mathrm{Stab}_G([x])$ pour chaque $[x] \in \{[\rho], [\rho^2], [\rho^3]\}$.
- ▶ Déterminer $\{[x]\}$ pour chaque $[x] \in \{[\rho], [\rho^2], [\rho^3]\}$; où $\{[x]\}$ désigne la classe d'équivalence de $[x]$ dans G/H (par rapport à la relation d'équivalence induit par l'action de G sur G/H.)
- ▶ Pour chaque $[x] \in \{[\rho], [\rho^2], [\rho^3]\}$ verifier l'égalité $|\{[x]\}| = |G|/|\mathrm{Stab}_G([x])|$.
- ▶ Déterminer explicitement la représentation symmétrique induit par cette action :

$$\pi\colon G \to \mathfrak{S}_4$$

  c'est-à-dire déterminer les images de tout les éléments.
- Déterminer $\ker(\pi)$.
- Répetez les exercices en considerant l'action de G sur G/H par multiplication à drotie :

$$\begin{aligned}\bullet\colon G \times G/H &\to G/H\\ (g,[x]) &\mapsto g \bullet [x] := [x \cdot g];\end{aligned}$$

(7) On considère l'action par conjugation de $G = D_{2\cdot 4}$ sur liu-même :

$$\begin{aligned}\bullet\colon D_{2\cdot 4} \times D_{2\cdot 4} &\to D_{2\cdot 4}\\ (g,x) &\mapsto g \bullet x := g \cdot x\end{aligned}$$

- ▶ Déterminer les classes d'équivalence de σ, ρ et ρ^2 déterminé par cette action.
- ▶ Déterminer $\mathrm{Stab}_G(x)$; où $x \in \{\sigma, \rho, \rho^2\}$.

- Verifier l'égalié $|[x]| = |G|/\mathrm{Stab}_G(x)$ pour chaque $x \in \sigma, \rho, \rho^2$.
- Déterminer explicitement la représentation symmétrique induit par cette action :

$$\pi\colon G \to \mathfrak{S}_8$$

(8) Expliciter l'équation des classes pour les groupes suivants :
- $G = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$
- $G = D_{2\cdot 4}$
- $G = D_{2\cdot 5}$
- $G = \mathfrak{S}_4$

(9) Déterminer tout les éléments de $\mathrm{Syl}_2(G)$ et $\mathrm{Syl}_3(G)$ où :
- $G = D_{2\cdot 6}$
- $G = \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$
- $G = A_4$
- $G = \mathfrak{S}_4$

(10) Montrer que les groupes qui sont d'ordre suivants possède au moins un sous groupe distingué :
- $|G| = 56$
- $|G| = 132$
- $|G| = 200$
- $|G| = 312$
- $|G| = 351$