MATH 204
ÉNONCÉS DES EXERCICES 5

A. ZEYTİN

(1) Soit $G = \mathfrak{S}_3$ et soit X est l'ensemble de tout les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$.
- ▶ Déterminer X explicitement. Trouver $|X|$.
- ▶ Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \bullet\colon G \times X &\to X \\ (g, H) &\mapsto gHg^{-1} \end{aligned}$$

définit une action de $\mathfrak{S}_3$ sur X.
- ▶ La classe d'équivalence de $\langle(1\,2)\rangle$, $\langle(1\,2\,3)\rangle$, $\mathfrak{S}_3$.
- ▶ Calculer $\mathrm{Stab}_G(\langle(1\,2)\rangle)$, $\mathrm{Stab}_G(\langle(1\,2\,3)\rangle)$, $\mathrm{Stab}_G(\mathfrak{S}_3)$.
- ▶ Déterminer la représentation symmétrique, $\pi\colon \mathfrak{S}_3 \to \mathfrak{S}_{|X|}$ déterminé par cette action.
- ▶ Déterminer $\ker(\pi)$.

(2) Répéter l'exercice précedent pour $G = \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.

(3) Soit G un groupe fini et $X = \mathcal{G}$ est l'ensemble de sous-groupes de G. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \bullet\colon G \times X &\to X \\ (g, H) &\mapsto gHg^{-1} \end{aligned}$$

- ▶ Montrer que si H est un sous-groupe de G alors gHg^{-1} est un sous-groupe de G, aussi.
- ▶ Montrer que l'application ci-dessus définit une action de G sur X.
- ▶ En déduire que le stabilizateur d'un sous-groupe $H \in X$ est le normalizateur $N_G(H)$ de H dans G, et donc un sous-groupe de G.
- ▶ Déterminer $\mathrm{Stab}_G(Z(G))$.
- ▶ Déterminer $\mathrm{Stab}_G(G)$.
- ▶ Déterminer $\ker(\pi)$, où $\pi\colon G \to \mathfrak{S}_{|X|}$ est la représentation symmétrique induit par cette action.

(4) Supposons que $(A, +, \cdot)$ et $(A', +', \cdot')$ deux anneaux. Montrer que $A \times A'$ est un anneau dans lequel les operations d'addition et multiplication sont :

$$\begin{aligned} \oplus\colon (A \times A') \times (A \times A') &\to (A \times A') \\ ((a_1, a_1'), (a_2, a_2')) &\to (a_1 + a_2, a_1' +' a_2') \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \otimes\colon (A \times A') \times (A \times A') &\to (A \times A') \\ ((a_1 a_1'), (a_2, a_2')) &\mapsto (a_1 \cdot a_2, a_1' \cdot' a_2') \end{aligned}$$

Est-il un corps? un anneau intégre?

(5) Décider si les ensemble suivants sont anneaux muni des operations indiquées, et si oui déterminer l'identité de addition et multiplication :
- ▶ $A = C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) := \{f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f \text{ cont.}\}$, $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$, $f \cdot g(t) := f(t)g(t)$
- ▶ $A = C(\mathbf{R}, \mathbf{R}) := \{f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f \text{ cont.}\}$, $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$, $f \cdot g(t) := f(g(t))$

(6) Déterminer les diviseurs de zéro dans les anneaux suivants :
- ▶ $A = \mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$
- ▶ $A = \mathbf{Z}/7\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$
- ▶ $A = \mathbf{Z}/7\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$
- ▶ $A = M(2, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$
- ▶ $A = M(2, \mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$

(7) Déterminer les éléments inversibles dans les anneux suivantes :
- ▶ $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$
- ▶ $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$
- ▶ $A = \mathbf{Z}/7\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$

- $A = \mathbf{Z}/7\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$
- $A = M(2, \mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$
- $A = M(2, \mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$

(8) Décider si les parties suivantes des anneaux indiqués sont sous-anneaux :
- $B = \mathbf{Q}_{\geq 0} \subseteq A = \mathbf{Q}$
- $B = \{\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \,|\, \mathrm{pgcd}(p, q) = 1,\ p, q \text{ impairs}\} \subseteq A = \mathbf{Q}$
- $B = \{\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \,|\, \mathrm{pgcd}(p, q) = 1,\ p \text{ impair}\} \subseteq A = \mathbf{Q}$
- $B = \{\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \,|\, \mathrm{pgcd}(p, q) = 1,\ p \text{ pair}\} \subseteq A = \mathbf{Q}$
- $B = \{\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \,|\, \mathrm{pgcd}(p, q) = 1,\ q \text{ impair}\} \subseteq A = \mathbf{Q}$
- $B = \{\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \,|\, \mathrm{pgcd}(p, q) = 1,\ q \text{ pair}\} \subseteq A = \mathbf{Q}$
- $B = \mathbf{Q}_{\geq 0} \subseteq A = \mathbf{Q}$
- $B = M(2, 2\mathbf{Z}) \subseteq A = M(2, \mathbf{Z})$
- $B = M(2, \mathbf{Z}) \subseteq A = M(2, \mathbf{Q})$
- $B = M(2, \mathbf{Q}) \subseteq A = M(2, \mathbf{R})$

(9) Soit A un anneau et soit B un sous-anneau de A.
- Montrer que si un élément $b \in B$ est inversible, alors b est inversible dans A, aussi.
- Vrai/Faux : si un élément $a \in A$ est inversible, alors a est inversible dans B, aussi.

(10) Soient A un anneau, B_1, B_2 deux sous-anneaux de A.
- Vrai/Faux: $B_1 \cup B_2$ est un sous-anneau de A.
- Vrai/Faux: $B_1 \cap B_2$ est un sous-anneau de A.

(11) Soit A un anneau et $a \in A$ un élément quelconque.
- Montrer que $C(a) := \{x \in A \,|\, ax = xa\}$ est un sous-anneau de A.
- Montrer que $C(A) = \bigcap_{a \in A} C(a)$ est un sous anneau de A, qui s'appelle le centre de A.

(12) Un anneau A est dit Boolean si $a^2 = a$ pour tout $a \in A$.
- Montrer que $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est Boolean.
- Si A est un anneau Boolean et intégre alors $A = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
- Montrer que A est commutatif. Indication: Montrer que $a = -a$ pour $a \in A$ quelconque.

(13) Soit X un ensemble non-vide et $A = \mathcal{P}(X)$ est l'ensemble de tout les sous-ensembles de X. Sur A on définit :

$$\begin{aligned} +\colon A \times A &\to A \\ (Y, Z) &\mapsto Y + Z := (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon A \times A &\to A \\ (Y, Z) &\mapsto Y \cdot Z := Y \cap Z \end{aligned}$$

- Montrer que A est un anneau commutatif unitaire.
- Est-il un anneau intégre.
- Montrer que A est Boolean.

(14) Montrer que les sous-anneaux $\{0\}$ et A d'un anneau A sont idéaux de A.

(15) Décider si les parties suivantes sont sous-anneaux de $\mathbf{Z}[X]$. Si oui, décider s'ils sont idéaux.
- $B = \{p(X) \in \mathbf{Z}[X] \,|\, (X^2 + 1) | p(X)\}$
- $B = \{p(X) \in \mathbf{Z}[X] \,|\, \deg(p) = 2\}$
- $B = \{p(X) \in \mathbf{Z}[X] \,|\, \deg(p) \leq 2\}$
- $B = \{p(X) \in \mathbf{Z}[X] \,|\, \deg(p) \geq 2\}$

(16) Décider si les parties suivantes sont sous-anneaux de $\mathbf{Q}[X]$. Si oui, décider s'ils sont idéaux.
- $B = \{p(X) \in \mathbf{Q}[X] \,|\, 3 | p(0)\}$
- $B = \{p(X) \in \mathbf{Q}[X] \,|\, p(X) = q(X^2) \text{ pour certain } q(X) \in \mathbf{Q}[X]\}$
- $B = \{p(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbf{Q}[X] \,|\, a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0\}$

(17) Soient A un anneau, I_1, I_2 deux idéaux de A.
- Vrai/Faux: $I_1 \cup I_2$ est un sous-anneau de A.
- Vrai/Faux: $I_1 \cap I_2$ est un sous-anneau de A.