MATH 204
ÉNONCÉS DES EXERCICES 6

A. ZEYTİN

(1) Soit
$$A = \{f\colon \mathbf{R} \to [0,1] \mid f \text{ différentiable}\}$$
Décider si les applications suivantes sont homomorphismes (d'anneaux) :
- $\varphi\colon A \to A;\ \varphi(f)(t) = \int_0^t f(x)dx$
- $\varphi\colon A \to A;\ \varphi(f)(t) = \frac{d}{dt}f(t)$
- $\varphi\colon A \to \mathbf{R};\ \varphi(f)(t) = \int_0^1 f(x)dx$
- $\varphi\colon A \to \mathbf{R};\ \varphi(f)(t) = \frac{d}{dt}f(t)|_{t=0}$

(2) Trouver un monomorphisme de $\mathbf{C}$ vers $M(2,\mathbf{R})$.

(3) Supposons que A, B deux anneaux unitaires et $\varphi\colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux.
- Montrer par un exemple que $\varphi(1_A)$ n'est pas un élément inversible de B.
- Montrer que si $\varphi(1_A) \neq 1_B$ alors $\varphi(1_A)$ est un diviseur de zéro dans B.
- En deduire que si A et B sont anneaux intégres alors $\varphi(1_A) = 1_B$.
- Si $\varphi(1_A) = 1_B$ alors pour un élément $u \in A$ inversible de A montrer que $\varphi(u)$ est inversible avec $\varphi(u)^{-1} = \varphi(u^{-1})$.

(4) Supposons que A, B deux anneaux unitaires et $\varphi\colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux.
- Montrer que si J est un idéal de B alors $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal de A.
- Montrer que si φ est surjective et I est un idéal de A alors $\varphi(I)$ est un idéal de B.
- Est-ce que le resultat précedent est vrai si φ n'est pas un epimorphisme?

(5) Expliciter la table de multiplication de :
- $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$
- $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$
- $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$
- $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$

(6) Déterminer tout les idéaux de
- $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$
- $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$
- $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$
- $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$

Dans le liste identifier les idéaux maximaux.

(7) Soit A un corps. Dans l'ensemble $A[X]$ on fixe un polynôme unitaire $f_o(X)$ de degré n, c'est-à-dire $f_o(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$.
- Montrer que l'ensemble $(f_o(X)) := \{g(X) \in A[X] \mid f_o(X) \mid g(X)\}$ est un idéal de $A[X]$.
- Montrer que si $[p(X)] \in A[X]/(f_o(X))$ un élément quelconque, alors il existe $q(X) \in [p(X)]$ tel que $\deg(q(X)) < n$
- Montrer que si $p(X), q(X)$ sont deux polynômes distincts de $A[X]$ de degré $< n$ alors $[p(X)] \neq [q(X)]$.
- Montrer que s'il existe deux polynômes $a(X)$, $b(X) \in A[X]$ tels que $f_o(X) = a(X)b(X)$; alors $A[X]/(f_o(X))$ n'est pas un anneau intégre.

(8) On considère l'anneau $A = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[X]/(X^2 + X + 1)$ - voir l'exercice précedent.
- En utilisant Exercice 7 expliciter la table de multiplication de A et déterminer la cardinalité de A.

- ▶ Déterminer les diviseurs de zéro et les éléments inversibles dans A.
- ▶ Déterminer tout les idéaux de A.

(9) On considère l'anneau $A = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}[X]/(X^2 + X + 1)$.
- ▶ En utilisant Exercice 7 expliciter la table de multiplication de A et déterminer la cardinalité de A.
- ▶ Déterminer les diviseurs de zéro et les éléments inversibles dans A.
- ▶ Déterminer tout les idéaux de A.

(10) On considère l'anneau $A = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[X]/(X^3 + X)$.
- ▶ En utilisant Exercice 7 expliciter la table de multiplication de A et déterminer la cardinalité de A.
- ▶ Déterminer les diviseurs de zéro et les éléments inversibles dans A.
- ▶ Déterminer tout les idéaux de A.

(11) On considère l'anneau $A = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}[X]/(X^3 + 2X)$.
- ▶ En utilisant Exercice 7 expliciter la table de multiplication de A et déterminer la cardinalité de A.
- ▶ Déterminer les diviseurs de zéro et les éléments inversibles dans A.
- ▶ Déterminer tout les idéaux de A.

(12) Supposons que A est un anneau intégre qui possède un nombre fini d'idéaux. Montrer que A est un corps.

(13) Soit A un anneau commutatif unitaire. Un élément $x \in A$ est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $x^n = 0$.
- ▶ Déterminer les éléments nilpotents dans $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$.
- ▶ Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotents dans $M(2, \mathbf{Z})$.
- ▶ En utilisant l'exercice précedent montrer que l'ensemble d'éléments nilpotents dans un anneau n'est pas un sous-anneau, donc n'est pas un idéal.
- ▶ Montrer que si $x \in A$ est nilpotent et $\varphi \colon A \to B$ un homomorphisme alors $\varphi(x)$ est nilpotent.