MATH 204
ÉNONCÉS DES EXERCICES 7

A. ZEYTİN

(1) Déterminer tout les idéaux premiers et maximaux de
- ▶ $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$
- ▶ $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$
- ▶ $\mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$
- ▶ $\mathbf{Z}/19\mathbf{Z}$

(2) Soit $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.
- ▶ Trouver un idéal premier de A qui n'est pas maximal.
- ▶ Trouver un idéal maximal de A.
- ▶ Trouver un idéal de a qui n'est pas un idéal premier.

(3) Soit A un anneau et I un idéal de A.
- ▶ Montrer que l'idéal engendré par I dans $A[X]$ est égal à $I[X]$.
- ▶ Montrer que l'anneaux $(A/I)[X]$ et $A[X]/I[X]$ sont isomorphes.
- ▶ En déduire que $\mathbf{Z}[X]/(N) \cong \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}[X]$ pour tout $N \in \mathbf{N}$.
- ▶ Déterminer tout N tels que (N) est un idéal premier de $\mathbf{Z}[X]$.
- ▶ Est-ce qu'il existe un $N \in \mathbf{N}$ tel que (N) est un idéal maximal de $\mathbf{Z}[X]$.

(4) Soit $a, b \in A$ deux éléments quelconques d'un anneau A. On dit que $a \sim b$ si et seulement si il existe $u \in A^\times$ tel que $a = ub$(i.e. a et b sont associés).
- ▶ Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
- ▶ Déterminer les classes d'équivalence si $A = \mathbf{Z}[X]$.
- ▶ Déterminer les classes d'équivalence si $A = \mathbf{Q}[X]$.
- ▶ Déterminer les classes d'équivalence si $A = \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$.
- ▶ Déterminer les classes d'équivalence si $A = \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}[X]$.
- ▶ Déterminer les classes d'équivalence si $A = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$.
- ▶ Déterminer les classes d'équivalence si $A = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}[X]$.
- ▶ Déterminer les classes d'équivalence si $A = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$.
- ▶ Déterminer les classes d'équivalence si $A = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}[X]$.

(5) Soit $A = \{f\colon [0,1] \to \mathbf{R} \,|\, f \text{ continue}\}$. On fixe un $r_o \in [0,1]$
- ▶ Montrer que

$$\begin{aligned} \varphi_{r_o}\colon A &\to \mathbf{R} \\ f(t) &\mapsto f(r_o) \end{aligned}$$

  est un homomorphisme d'anneaux.
- ▶ En déduire que $\ker(\varphi_{r_o})$ est un idéal maximal
- ▶ Déterminer $\ker(\varphi_{r_o})$ explicitement.

(6) Soit A un anneau intégre. Montrer que si $\{0\}$ est un idéal maximal de A, alors A est un corps.

(7) Supposons que A est un anneau commutatif unitaire. Montrer que l'idéal principal (X) dans $A[X]$ est un idéal premier si et seulement si A est un anneau intégre.

(8) Soit A un anneau (pas nécessairement intégre). Montrer que si $a(X), b(X) \in A[X]$ deux polynômes quelconques, alors il est possible d'avoir : $\deg(a(X)b(X)) < \deg(a(X)) + \deg(b(X))$.

(9) Décider si les éléments suivantes sont irreductibles dans l'anneau indiqués :
- ▶ $X^3 + 3X + 2 \in \mathbf{Z}[X]$
- ▶ $X^3 + 3X + 2 \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}[X]$

- $X^3 + 3X + 2 \in \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}[X]$
- $X^3 + 2X + 3 \in \mathbf{Z}[X]$
- $X^3 + 2X + 3 \in \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}[X]$
- $X^3 + 2X + 3 \in \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}[X]$
- $X^2 + 1 \in \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$
- $X^2 + 2 \in \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$
- $X^2 + 3 \in \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$
- $X^2 + 4 \in \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$
- $X^{17} + 10X^{10} + 20X^4 + 25X^2 + 5 \in \mathbf{Q}[X]$
- $X^4 + 3X^3 - 7X^2 + 2 \in \mathbf{Q}[X]$

(10) Déterminer tout c tel que :
- $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}[X]/(X^2 + c)$
- $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}[X]/(X^2 + X + c)$
- $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}[X]/(X^2 + c)$
- $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}[X]/(X^2 + X + c)$
- $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}[X]/(X^2 + c)$
- $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}[X]/(X^2 + X + c)$

est un corps. Déterminer la cardinalité de chaque anneau.

(11) Déterminer le pgcd de :
- $a(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 + 4X - 1$ et $b(X) = X^2 - 2X + 3$ dans $A = \mathbf{Q}[X]$
- $a(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 + 4X - 1$ et $b(X) = X^2 - 2X + 3$ dans $A = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}[X]$
- $a(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 + 4X - 1$ et $b(X) = X^2 - 2X + 3$ dans $A = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}[X]$
- $a(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 + 4X - 1$ et $b(X) = X^2 - 2X + 3$ dans $A = \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}[X]$
- $a(X) = X^3 + 4X^2 + X - 6$ et $b(X) = X^5 - 6X + 5$ dans $A = \mathbf{Q}[X]$

(12) Soit k un corps. Montrer que les éléments inversibles de $k[X]$ sont $k \setminus \{0\}$.

(13) Déterminer tout les éléments inversibles dans $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$.

(14) Soit $A = \mathbf{Z}[\sqrt{3}]$.
- Montrer que $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ est inversible.
- Montrer qu'il existe une infinité d'éléments inversibles dans A. <u>Indication:</u> Montrer que α^n est inversible pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer que a_n et b_n qui satisfait $\alpha^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ sont suites strictement croissantes.

(15) Dans $\mathbf{Z}[\sqrt{D}]$, montrer que si $N(\alpha) = p$; où p est un nombre premier, alors α est irreductible.

(16) Dans $A = \mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$, montrer que
- $2, 3, (1 + \sqrt{-5}), (1 - \sqrt{-5})$ sont irreductibles. <u>Indication:</u> Les normes ne sont pas premiers. Il faut démontrer directement!
- Déterminer tout les éléments inversibles dans A.
- En déduire que $2, 3, (1 + \sqrt{-5}), (1 - \sqrt{-5})$ ne sont pas associés.

Ainsi : $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$ c'est-à-dire factorization dans $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ n'est pas unique. Un anneau dans lequel factorization d'un élément est détermine uniquement est dit un *anneau factoriel*. Donc, $A = \mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ n'est pas un anneau factoriel, mais $\mathbf{Z}$ et $k[X]$ (où k est un corps) sont anneaux factoriels.