Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2017 - Deuxième Semestre – Math 204 - Algèbre Abstraite
Examen Final, 25 Mai 2018 – Ayberk Zeytin
150 mins. Nom & Prénom: ______________________ **ID:** __________

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	16	6	6	20	48	96
Score:						

Question 1 (16 points)
Soit $\mathsf{G} = \mathsf{A}_4 \times \mathsf{A}_4$.

(a) (4 points) Déterminer $\mathrm{Syl}_3(\mathsf{A}_4)$ explicitement.

(b) (4 points) Déterminer $\mathrm{Syl}_3(\mathsf{G})$ explicitement.

(c) (4 points) Considerez l'action de G sur $\mathrm{Syl}_3(\mathsf{G})$ par conjugaison. Déterminer $\mathrm{Stab}(\mathsf{P})$.

(d) (4 points) Choisir un element, disons P, de $\mathrm{Syl}_3(\mathsf{G})$ et déterminer $[\mathsf{P}]$.

Question 2 (6 points)

Soit A un anneau intégre. Supposons qu'il existe deux éléments $a, b \in A$ et deux entiers naturels m, n premiers entre eux (c'est-à-dire $\text{pgcd}(m, n) = 1$), tels que $a^m = b^m$ et $a^n = b^n$. Montrer que $a = b$.

Question 3 (6 points)

Soit A un anneau unitaire (pas commutatif nécessairement) et $a, b \in A \setminus \{0\}$ deux éléments quelconques. Montrer que si $1 - ab$ est inversible dans A, alors $1 - ba$ est inversible dans A, aussi. (<u>Indication:</u> Noter que $(1 - ab)a = a(1 - ba)$.)

Question 4 (20 points)

Soit $\mathsf{k} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. On pose $\mathsf{f}(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^3 + \mathsf{X}^2 + 1 \in \mathsf{k}[\mathsf{X}]$

(a) (4 points) Montrer que $\mathsf{f}(\mathsf{X})$ est irreductible.

(b) (6 points) Montrer que $(\mathsf{X}^4 + \mathsf{X}^3 + \mathsf{X}, \mathsf{X}^5 + \mathsf{X}^4 + \mathsf{X}^3 + 1) = (\mathsf{f}(\mathsf{X}))$. (Indication: Calculer le pgcd et utiliser Théorème de Bezout pour $\mathsf{k}[\mathsf{X}]$.)

(c) (4 points) En déduire que $\mathsf{K} = \mathsf{k}[\mathsf{X}]/(\mathsf{f}(\mathsf{X}))$ est un corps. Déterminer $|\mathsf{K}|$.

(d) (6 points) Écrire la table de multiplication de $\mathsf{K}^\times$ et déterminer le groupe $\mathsf{K}^\times$.

Question 5 (48 points)

Décider si les assertions suivantes sont vraies ou faux. Si vrai démontrer sinon donner un contre-exemple :

(a) (4 points) Si G est un groupe et $a, b \in G$ tels que $\mathrm{ord}(a) < \infty$ et $\mathrm{ord}(b) < \infty$, alors $\mathrm{ord}(ab) < \infty$

<u>V/F</u> ?

(b) (4 points) Si G est un groupe d'ordre n et $d \in \mathbf{N}$ un entier naturel qui divise n, alors il existe un $g \in G$ tel que $\mathrm{ord}(g) = d$.

<u>V/F</u> ?

(c) (4 points) Soient H et K deux sous-groupes quelconques d'un groupe G d'ordres m et n respectivement. Si $\mathrm{pgcd}(m, n) = 1$ alors $H \cap K = \{e\}$.

<u>V/F</u> ?

(d) (4 points) Soient G un groupe (pas abélien nécessairement), H et K deux sous groupes distingués de G. Si $H \cap K = \{e\}$, alors $hk = kh$ pour tout $h \in H$ et $k \in K$.

<u>V/F</u> ?

(e) (4 points) Si G est un groupe et H est un sous-groupe de G alors G et H ne peuvent pas être isomorphes. V/F ?

(f) (4 points) Un groupe G d'ordre 2018 n'est pas simple. (Indication: 1009 est premier!) V/F ?

(g) (4 points) Si A est un sous-anneau de B et I un idéal de A alors I est un idéal de B, aussi.
V/F ?

(h) (4 points) Soit A un anneau et B un sous-anneau de A. Si un élément $\mathsf{b} \in \mathsf{B}$ est irreductible dans B alors b est irreductible dans A, aussi.
V/F ?

(i) (4 points) Soient A, B deux anneaux. S'il existe un isomorphisme entre $(A, +_A)$ et $(B, +_B)$ alors il existe un isomorphisme entre les anneaux A et B.
V/F ?

(j) (4 points) Un homomorphisme (non-trivial) d'anneaux commutatifs $\varphi \colon k \to A$ est injective si k est un corps.
V/F ?

(k) (4 points) Si A est un anneau intégre et I un idéal de A alors A/I est un anneau intégre, aussi.
V/F ?

(l) (4 points) $X^{23} + 21X^{17} - 9x^{13} + 12X^7 - 6 \in \mathbf{Q}[X]$ est irreductible.
V/F ?