Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2017 - Deuxième Semestre – Math 204 - Algèbre Abstraite
Examen Partiel 1, 21 Mar. 2017 – Ayberk Zeytin
120 mins. Nom & Prénom: ______________________ ID: ________

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	26	22	32	15	95
Score:					

Question 1 (26 points)

Soit G un groupe et soit $\mathsf{g} \in \mathsf{G}$.

(a) (6 points) Montrer que si $\operatorname{ord}(\mathsf{g}) = |\mathsf{G}| < \infty$ alors $\mathsf{G} = \langle \mathsf{g} \rangle$.

(b) (6 points) Fixons un entier naturel N. Montrer que $\langle [n] \rangle = \mathbf{Z}/\mathsf{N}\mathbf{Z}$ si et seulement si $\operatorname{pgcd}(n, \mathsf{N}) = 1$.

(c) (4 points) Déterminer tout $\mathsf{g} \in \mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$ tels que $\langle \mathsf{g} \rangle = \mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$.

(d) (4 points) Est-ce qu'il existe un $\mathsf{g} \in \mathsf{D}_{2\cdot 5}$ tel que $\langle \mathsf{g} \rangle = \mathsf{D}_{2\cdot 5}$.

(e) (6 points) Est-ce que (a) est vrai quand G soit un groupe infini, c'est-à-dire si $|\mathsf{G}| = \infty$.

Question 2 (22 points)

Soient G, G' deux groupes et $\varphi\colon \mathsf{G} \to \mathsf{G}'$ un epimorphisme.

(a) (6 points) Montrer que si N est un sous groupe distingué de G alors $\varphi(\mathsf{N})$ est un sous groupe distingué de G'.

(b) (6 points) Montrer que si H' est un sous groupe de G' alors

$$\varphi^{-1}(\mathsf{H}') = \{g \in \mathsf{G} \mid \varphi(g) \in \mathsf{H}'\}$$

est un sous groupe de G.

(c) (4 points) En déduire que $\ker(\varphi)$ est un sous-groupe de $\varphi^{-1}(\mathsf{H}')$.

(d) (6 points) Montrer que si N' est un sous groupe distingué de G' alors $\varphi^{-1}(\mathsf{N}')$ est un sous groupe distingué de G.

Question 3 (32 points)

Considerons le groupe $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

(a) (4 points) Pour un élément $\frac{p}{q}$ de $\mathbf{Q}$ ($p, q \in \mathbf{Z}$, premiers entre eux) expliciter la classe d'équivalence $\left[\frac{p}{q}\right] \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

(b) (6 points) Montrer que chaque classe d'équivalence contient un élément, disons $\frac{p_o}{q_o}$, qui satisfait $0 \leq \frac{p_o}{q_o} < 1$.

(c) (4 points) Déterminer $\mathrm{ord}(\left[\frac{204}{7}\right])$.

(d) (6 points) Montrer que pour tout entier naturel N, il existe un élément $\left[\frac{p}{q}\right] \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tel que $\mathrm{ord}(\left[\frac{p}{q}\right]) = N$

(e) (6 points) Montrer qu'il n'existe pas un élément de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ qui est d'ordre ∞.

(f) (6 points) En déduire que $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ n'est pas cyclique.

Question 4 (15 points)

Décider si les assertions suivantes sont vraies ou faux. Si vrai démontrer sinon donner un contre-exemple :

(a) (5 points) Le groupe $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$ est cyclique.

V/F ?

(b) (5 points) Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_8$, $\sigma^8 = (1)$.

V/F ?

(c) (5 points) Il n'existe pas un élément d'ordre 7 dans $\mathfrak{S}_8$.

V/F ?