Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2017 - Deuxième Semestre – Math 204 - Algèbre Abstraite
Examen Partiel 2, 25 Avr. 2018 – Ayberk Zeytin
120 mins. Nom & Prénom: ____________________________ ID: __________

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	37	8	8	10	18	81
Score:						

Question 1 (37 points)

(a) (6 points) En considérant l'action de $D_{2\cdot 4}$ sur un carré dont le sommets sont marqués comme $1, 2, 3$ et 4 obtenez un homomorphisme de $D_{2\cdot 4}$ vers $\mathfrak{S}_4$. On le note par π.

(b) (6 points) Déterminez $\ker(\pi)$ et $\mathrm{im}(\pi)$ explicitement.

Dans la suite de l'exercice $\mathsf{G} = A_6$

(c) (3 points) Déterminez $|\mathsf{G}|$.

(d) (6 points) Trouvez un élément de $\mathrm{Syl}_2(\mathsf{G})$. (Indication: Utilisez exercice (b). Le produit d'un cycle impair avec une transposition disjointe est un élément pair!)

(e) (8 points) Trouvez un élément de $\mathrm{Syl}_3(\mathsf{G})$ et déterminez $\mathfrak{n}_3$.

(f) (8 points) Trouvez un élément de $\mathrm{Syl}_5(\mathsf{G})$ et déterminez $\mathfrak{n}_5$.

Question 2 (8 points)

Soit G un groupe fini, disons $|G| = n$ et soit $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ un entier non-nul. On considère l'application

$$\begin{aligned} f\colon G &\to G \\ g &\mapsto g^k \end{aligned}$$

Montrez que f est une bijection si et seulement si $(k, n) = 1$. (Indication: Théorème de Cauchy.)

Question 3 (8 points)

Soit G un groupe d'ordre $351 = 13 \cdot 27$. Montrer que G n'est pas simple.

Question 4 (10 points)

Explicitez l'équation aux classes pour $\mathsf{G} = \mathsf{D}_{2\cdot 6}$.

Question 5 (18 points)

Décider si les assertions suivantes sont vraies ou faux. Si vrai démontrer sinon donner un contre-exemple :

(a) (3 points) Si A est un anneau unitaire, alors A contient au moins 2 éléments inversibles.
V/F ?

(b) (3 points) Si A est un anneau unitaire, alors A contient au plus 2 éléments inversibles.
V/F ?

(c) (3 points) Si $a \in A$ est un diviseur de zéro, alors a n'est pas inversible.
V/F ?

(d) (3 points) Si $a \in A$ est inversible, alors a n'est pas un diviseur de zéro.
V/F ?

(e) (3 points) Pour $a \in A$ quelconque, soit a est un diviseur de zéro, soit a est inversible.
V/F ?

(f) (3 points) $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ est un anneau intégre.
V/F ?