MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 5

A. ZEYTİN

(1) En supposant que tout les dérivées partielles existent, calculer :
- ▶ $\dfrac{dz}{dt}$; où $z = f(x, y, t)$, $x = g(t)$ et $y = h(t)$.
- ▶ $\dfrac{\partial w}{\partial t}$; où $w = f(x, y, z)$, $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, $z = k(s, t)$.
- ▶ $\dfrac{\partial w}{\partial s}$; où $w = f(x, y, z)$, $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, $z = k(s, t)$.

(2) En supposant que tout les dérivées partielles existent, calculer :
- ▶ $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ si $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x(s, t) = e^{s^2+t^2}$ et $y(s, t) = 1 + \cos^2(st)$,
- ▶ $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ si $u(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$, $x(s, t) = 2s + t$ et $y(s, t) = 1 + e^{2(s+t)}$,
- ▶ $\dfrac{\partial^2 w}{\partial s^2}$; où $w = f(x, y)$, $x(s, t) = 2s + 3t$, $y(s, t) = 3s - 2t$.
- ▶ $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x \partial^2 y}$; où $w = f(u, v)$ et $u(x, y) = 2x + 3y$, $v(x, y) = xy$.
- ▶ $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$; où $w = f(t, u, v)$ et $t(x, y) = x^2$, $u(x, y) = y^2$, $v(x, y) = -xy$.

(3) Trouver une équation du plan $\mathcal{P}$ déterminé par les informations suivants :
- ▶ $P_1 = (1, 1, 2), P_2 = (1, 2, 1), P_3 = (2, 1, 1) \in \mathcal{P}$
- ▶ $P_1 = (1, 0, 0), P_2 = (0, 1, 0), P_3 = (0, 0, 1) \in \mathcal{P}$
- ▶ $P_1 = (1, 1, 0), P_2 = (0, 1, 1), P_3 = (1, 0, 0) \in \mathcal{P}$
- ▶ $P_o = (-1, 2, -2) \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{v} = (2, 1, 1)$ sont vecteurs dans $\mathcal{P}$.
- ▶ $P_o = (1, -2, 1) \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{v} = (3, 2, 1)$ sont vecteurs dans $\mathcal{P}$.
- ▶ $P_o = (0, 1, -2) \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{u} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (1, 2, 3)$ sont vecteurs dans $\mathcal{P}$.

(4) Déterminer une équation du plan qui :
- ▶ passe par $P_o = (-2, 0, -1)$ et contient la droite ℓ obtenue par l'intersection de $\mathcal{P}_1 : x - 4y + 2z = -5$ et $\mathcal{P}_2 : 2x + 3y - z = 0$
- ▶ contient la droite ℓ obtenu par l'intersection de $\mathcal{P}_1 : x + y = 2$ et $\mathcal{P}_2 : y - z = 3$ et perpendiculaire au $2x + 3y + 4z = 5$.

(5) Donner les équations paramétriques, vectoriels et symmétriques des droites suivants:
- ▶ ℓ est l'indersection de $\mathcal{P}_1 : x + y - z = 3$ et $\mathcal{P}_2 : x - y = 2$,
- ▶ ℓ est l'indersection de $\mathcal{P}_1 : x + 2y - z = 2$ et $\mathcal{P}_2 : x + 3y + z = 1$,
- ▶ ℓ est l'indersection de $\mathcal{P}_1 : 2x + y - 2z = 4$ et $\mathcal{P}_2 : x + y - 3z = 1$,
- ▶ ℓ est l'indersection de $\mathcal{P}_1 : x + y + z = 0$ et $\mathcal{P}_2 : 2x + 3y - z = 1$,

(6) Soit $f(x, y) = y^4 + x^2y^2 + x^4$. Calculer $D_{\overrightarrow{u}}(f)(x_o, y_o)$; où
- ▶ $(x_o, y_o) = (1, 0)$ et $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire ayant la même direction que le vecteur $(1, 2)$
- ▶ $(x_o, y_o) = (1, 0)$ et $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire ayant la même direction que le vecteur $(2, 1)$
- ▶ $(x_o, y_o) = (1, 0)$ et $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire ayant la même direction que le vecteur $(1, -2)$
- ▶ $(x_o, y_o) = (1, 0)$ et $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire ayant la même direction que le vecteur $(-1, 2)$
- ▶ $(x_o, y_o) = (1, 0)$ et $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire ayant la même direction que le vecteur $(-1, -1)$
- ▶ $(x_o, y_o) = (1, 0)$ et $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire ayant la même direction que le vecteur $(-1, 1)$
- ▶ $(x_o, y_o) = (0, 1)$ et $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire ayant la même direction que le vecteur $(1, 2)$
- ▶ $(x_o, y_o) = (0, 1)$ et $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire ayant la même direction que le vecteur $(2, 1)$
- ▶ $(x_o, y_o) = (0, 1)$ et $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire ayant la même direction que le vecteur $(1, -2)$

- $(x_o, y_o) = (0,1)$ et $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire ayant la même direction que le vecteur $(-1,2)$
- $(x_o, y_o) = (0,1)$ et $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire ayant la même direction que le vecteur $(-1,-1)$
- $(x_o, y_o) = (0,1)$ et $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire ayant la même direction que le vecteur $(-1,1)$

(7) Calculer $D_{\overrightarrow{u}}(f)(x_o, y_o)$; où
- $f(x,y) = \frac{x}{1+y}$; $(x_o, y_o) = (0,0)$ et $\overrightarrow{u} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$,
- $f(x,y) = x^2 + y^2$; $(x_o, y_o) = (1,2)$ et $\overrightarrow{u} = (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$,
- $f(x,y) = e^{x^2y+xy^2}$; $(x_o, y_o) = (1,1)$ et $\overrightarrow{u} = (-3/5, 4/5)$,
- $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$; $(x_o, y_o) = (1,-2)$ et $\overrightarrow{u} = (5/13, 12/13)$,

(8) Calculer ∇f pour les fonctions suivantes :
- $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^2$
- $f(x,y,z) = x^2 + xyz + z^3$
- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\cos(y)}{3x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,0) \end{cases}$
- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(9) Déterminer (s'il existe) un vecteur unitaire, $\overrightarrow{u}$, tel que la dérivée directionelle de la fonction $f\colon S \to \mathbf{R}$ en direction de $\overrightarrow{u}$ à X_o est d (c'est-à-dire $(D_{\overrightarrow{u}}f)(X_o) = d$); où :
- $f(x,y) = ye^{-xy}$, $X_o = (x_o, y_o) = (1,2)$, $d = 1$,
- $f(x,y) = x^4y - x^2y^3$, $X_o = (x_o, y_o) = (-1,2)$, $d = 2$,
- $f(x,y,z) = 5x^2 - 3xyz + 7z^2$, $X_o = (x_o, y_o, z_o) = (2,1,-1)$, $d = 1$,
- $f(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2+z^2}$, $X_o = (x_o, y_o, z_o) = (1,2,1)$, $d = 1$,

(10) Déterminer une équation du plan tangent de la fonction f à (x_o, y_o); où
- $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$ et $(x_o, y_o) = (4,7)$
- $f(x,y) = e^{xy} - y$ et $(x_o, y_o) = (0,1)$
- $f(x,y) = \sin(x^2+y^2) - \cos(xy)$ et $(x_o, y_o) = (\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}})$
- $f(x,y) = \ln(x+y) - (x+y)$ et $(x_o, y_o) = (1/2, 1/2)$

(11) En utilisant la linéarisation d'une fonction f donner une approximation à :
- $\sqrt{20 - \left(\frac{19}{10}\right)^2 - \left(\frac{11}{10}\right)^2}$
- $\ln\left(\frac{69}{10} - 3 \cdot \frac{41}{20}\right)$
- $\sqrt{\left(\frac{61}{20}\right)^2 + \left(\frac{19}{10}\right)^2 + \left(\frac{71}{10}\right)^2}$

(12) Décider si les fonctions suivantes sont dérivables dans $\mathbf{R}^2$:
- $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$
- $f(x,y) = x + x^2y + y$
- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\cos(y)}{3x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (1,0) \end{cases}$
- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(13) Soient $f, g\colon S \to \mathbf{R}$ deux fonctions, $(x_o, y_o) \in S$. Déterminer les linéarisations suivantes :

- $L_{(f+g),(x_o,y_o)}(x, y)$
- $L_{(f-g),(x_o,y_o)}(x, y)$
- $L_{(f*g),(x_o,y_o)}(x, y)$

En utilisant votre resultats, montrer que si f et g sont dérivables à (x_o, y_o), alors $f \pm g$ sont dérivables à (x_o, y_o), aussi.