MATH 201
ÉNONCÉS DES EXERCICES 6

A. ZEYTİN

(1) Montrer que si $f\colon S \to \mathbf{R}$ est une fonction dérivable à $(a,b) \in S$; où $S \subset \mathbf{R}^2$, ouverte et connexe, alors f est continue à (a,b).

(2) Définir une matrice hessienne pour une fonction $f\colon S \to \mathbf{R}$ de classe C^∞; où $S \subset \mathbf{R}^n$ et calculer la matrice hessienne des fonctions suivantes :
- $f(x,y) = \cos(x+y^2)$
- $f(x,y) = \sin(x) + \cos(y^2)$
- $f(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4$
- $f(x,y,z) = x^2e^y + z^2$
- $f(x,y,z) = xy\cos(x+y) + z$
- $f(x,y,z) = xyz + e^{3x+2y+z}$

(3) Déterminer la série de Taylor des fonctions suivantes autour de points indiqués jusqu'à (et y compris) degré 3 :
- $f(x,y) = e^{2x-y}$ autour de $(a,b) = (0,0)$
- $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ autour de $(a,b) = (1,0)$
- $f(x,y) = x + xy + xy^2$ autour de $(a,b) = (1,0)$
- $f(x,y) = \cos(xy^2)$ autour de $(a,b) = (0,0)$
- $f(x,y) = \sin(x+y^2)$ autour de $(a,b) = (0,0)$

(4) Soit $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^3}$.
- Déterminer la série de Taylor de f jusqu'à (et y compris) degré 2 autour de $(1,2)$
- En utilisant cette série donner une approximation de $\sqrt{(1.1)^2 + (2.1)^3}$.
- Donner une estimation de l'erreur de votre calcul.

(5) Écrire la série de Taylor d'une fonction $f\colon S \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ autour d'un point $(a,b,c) \in \mathrm{int}(S)$; où $S \subset \mathbf{R}^3$ fermée et connexe. En utilisant votre formulation déterminer la série de Taylor des fonctions suivantes autour de points indiqués jusqu'à (et y compris) degré 2 :
- $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$ autour de $(a,b,c) = (0,1,0)$
- $f(x,y,z) = xy^3 - zy^2$ autour de $(a,b,c) = (1,0,2)$
- $f(x,y,z) = e^{x+2y+3z}$ autour de $(a,b,c) = (0,0,0)$

(6) Déterminer les extrémum locales (min/max) et points selles de fonctions suivantes :
- $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$
- $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
- $f(x,y) = e^x\cos(y)$
- $f(x,y) = y\cos(x)$
- $f(x,y) = e^y(y^2 - x^2)$
- $f(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3$