Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2018- Premier Semestre – Math 201 - Analyse à Plusieurs Variables
Examen Final, 15 janvier 2019 – Ayberk Zeytin
150 mins. **Nom & Prénom:** ____________________

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	42	34	22	18	116
Score:					

Question 1 (42 pts)

(a) (6 points) En commençant par la représentation $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ où $|t| < 1$, déterminer la série de $\ln(1+t)$ autour du $t = 0$.

(b) (4 points) Déterminer la série de $\ln(x)$ autour du $x = 1$.

(c) (8 points) Déterminer la domaine de la série de $\ln(x)$ dans (b).

(d) (6 points) Calculer la somme : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{-1}{201}\right)^{n}$. Indication: Utiliser la série dans (b).

(e) (6 points) Déterminer la série de $f(x, y) = \ln(1 + x^3 + y^3)$ en utilisant (a) autour du $(0, 0)$.

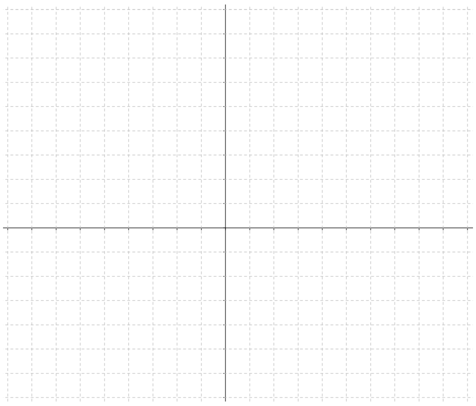
(f) (6 points) Calculer $\dfrac{\partial^{402} f}{(\partial y)^{201}(\partial x)^{201}}((0, 0))$.

(g) (6 points) Donner une approximation à $\ln\left(1 + \frac{1}{201^3} + \frac{1}{204^3}\right)$ en utilisant la série dans (e) jusqu'a (et y compris) termes cubiques.

Question 2 (34 pts)

On considère la fonction $f(x, y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2$ sur $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -3 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

(a) (6 points) Dessiner S dans la figure suivante et paramétriser $\partial S = \ell \sqcup \mathcal{C}$ (ℓ designe le droite et $\mathcal{C}$ le reste de la frontière - qui est , en effet, une courbe) en donnant deux fonctions γ_1 et γ_2.



(b) (10 points) Déterminer les points critiques de f dans $\mathrm{int}(S)$ et donner leur classification (min/max local, point selle?).

(c) (8 points) En utilisant la methode de multiplicateur de Lagrange optimiser f sur $\mathcal{C} \subseteq \partial S$.

(d) (6 points) En utilisant une paramétrisation (par exemple la paramétrisation dans (a)) de la droite $\ell \subseteq \partial S$ optimiser f sur ℓ.

(e) (4 points) Expliquer pourquoi les maximum et minimum globals de f existent et les déterminer.

Question 3 (22 pts)

Soient $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1, $P_o = (x_o, y_o, z_o) \in S = \{P = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, f(P) = f(x, y, z) = 0\}$.

Soit $g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 qui satisfait $g(-1, 3) = 0$, $g_1(-1, 3) = 2$ et $g_2(-1, 3) = -3$.

(a) (6 points) Si :

$$\begin{aligned} r\colon (-\varepsilon, \varepsilon) &\to S \\ t &\mapsto r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

est une courbe sur la surface S avec $r(0) = P_o$. Montrer que $(\nabla f)(P_o) \perp r'(0)$.

(b) (6 points) Posons $F(x, y, z) = g(xyz, x^2 + y^2 + z^2)$. Calculer $\nabla F(1, -1, 1)$.

(c) (4 points) Montrer que le point $(1,-1,1)$ est un point sur la surface $\mathsf{T} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, \mathsf{F}(x,y,z) = 0\}$.

(d) (6 points) Déterminer une équation du plan tangent de la surface T. Indication: Utiliser (a).

Question 4 (18 pts)

Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Si vrai, donner une démonstration, si faux, donner un contre-exemple:

(a) (6 points) Si $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
Vraie / Fausse :

(b) (6 points) Soit $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$. Les dérivés partielles $f_1(0,0)$ et $f_2(0,0)$ existent.
Vraie / Fausse :

(c) (6 points) Soit $f\colon S \to \mathbf{R}$ une fonction; où $S \subseteq \mathbf{R}^2$ une partie ouverte connexe qui contient $(0,0)$. Si $f_1(0,0)$ et $f_2(0,0)$ existent alors $D_{\overrightarrow{v}}(f)(0,0)$ existe pour tout $\overrightarrow{v}$ vecteur unitaire. <u>Indication</u>: Faire attention à la fonction dans (b).
Vraie / Fausse :