Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2018- Premier Semestre – Math 201 - Analyse à Plusieurs Variables
Examen Partiel 1, 05 novembre 2018 – Ayberk Zeytin
120 mins. Nom & Prénom: ______________________

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	20	20	12	22	74
Score:					

Question 1 (20 points)
Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses? Si vraie, donner une démonstration, si faux, donner un contre-exemple.

(a) (4 points) Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

(b) (4 points) Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge.

(c) (4 points) Soient $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ deux séries à termes positifs convergentes. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ converge.

(d) (4 points) Soient $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ deux séries à termes positifs convergentes. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{k\in\mathbf{N}}(a_k, b_k)$ converge.

(e) (4 points) Soient $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ deux séries à termes positifs convergentes. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} \inf_{k\in\mathbf{N}}(a_k, b_k)$ converge.

Question 2 (20 points)

On considère la série de terme générale :

$$a_n = -\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{où } n \geq 2$$

(a) (8 points) Montrer que cette série converge.

(b) (6 points) Donner une expression explicite (c'est-à-dire une fonction de N) pour la suite de sommes partielles da le suite a_n, c'est-à-dire

$$S_N = \sum_{n=2}^{N} a_n$$

(c) (6 points) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Question 3 (12 points)

Calculer les limites suivantes :

(a) (6 points) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)!}{(3n)!}$

(b) (6 points) $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^8}{e^{x^4} - (1+x^4)}$

Question 4 (22 points)

On définit

$$f(x) = \int_0^x \cos(t^3)dt.$$

(a) (6 points) En utilisant la série de Taylor de $\sin(x)$ en $c = 0$, déterminer la série de Taylor de $f(x)$ en $c = 0$.

(b) (6 points) Déterminer $\frac{d^{199}}{dx^{199}}(f(x))\Big|_{x=0}$.

(c) (6 points) Donner une approximation de $\int_0^{1/2} \cos(t^3)dt$ en utilisant la série dans (a) jusqu'a (et y compris) degré 13.

(d) (4 points) Déterminer l'erreur de l'approximation dans (c) en utilisant le erreur d'un série alternée.