Université Galatasaray, Département de Mathématiques
2018- Premier Semestre – Math 201 - Analyse à Plusieurs Variables
Examen Partiel 2, 10 decembre 2018 – Ayberk Zeytin
120 mins. Nom & Prénom: ______________________

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	8	18	30	12	10	78
Score:						

Question 1 (8 points)
Soient $z = f(s, t)$, où $s = \frac{x}{y}$ et $t = \frac{y}{x}$. Étant donné les informations suivantes concernant les dérives partielles de f à $(1, -1)$, calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, -1)$:

$$
\begin{aligned}
f_1(-1,-1) &= 2 & \qquad f_1(1,-1) &= -2\\
f_2(-1,-1) &= -2 & f_2(1,-1) &= 2\\
f_{1,1}(-1,-1) &= 6 & f_{1,1}(1,-1) &= 8\\
f_{1,2}(-1,-1) &= -5 & f_{1,2}(1,-1) &= 6\\
f_{2,1}(-1,-1) &= 3 & f_{2,1}(1,-1) &= 6\\
f_{2,2}(-1,-1) &= 1 & f_{2,2}(1,-1) &= 3
\end{aligned}
$$

Question 2 (18 points)

Déterminer $\mathrm{int}(S)$, $\mathrm{ext}(S)$ et $\partial(S)$ des ensembles suivants :

(a) (6 points) $S = \mathbf{Z} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{R}$

(b) (6 points) $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - y^2 + 1 \leq 0\} \subset \mathbf{R}^2$

(c) (6 points) $S = \mathbf{Z} \times \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}^2$

Question 3 (30 points)

On considère la fonction :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) (8 points) Montrer que f est continue dans $\mathbf{R}^2$.

(b) (6 points) Déterminer $\nabla f(0,0)$, c'est-à-dire calculer $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)}$

(c) (8 points) Montrer que pour tout vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$, la dérive directionelle de f à $(0,0)$ en direction de $\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire $(D_{\overrightarrow{u}}f)(0,0)$ existe.

(d) (8 points) Montrer que f n'est pas dérivable à $(0,0)$.

Question 4 (12 points)

Calculer les limites suivantes :

(a) (6 points) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y^3}{x^4+y^6}$

(b) (6 points) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos^3(x)y^3}{x^2+y^2}$

Question 5 (10 points)

Soit $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et (x_o, y_o) un point quelconque de $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$.

(a) (6 points) Écrire une équation du plan tangent, noté par $\mathcal{P}_{(x_o, y_o)}$, de f à (x_o, y_o).

(b) (4 points) Montrer que pour tout $(x_o, y_o) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ le point $(0, 0, 0) \in \mathcal{P}_{(x_o, y_o)}$.