MATH 204
ÉNONCÉS DES EXERCICES 1

A. ZEYTİN

Dans cette feuille X est un ensemble non-vide et $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble de parties de X.

(1) Déterminez si les operations binaires suivantes sont associative, commutative? Déterminez l'élément neutre de l'operation binaires s'il existe.

- $$\begin{aligned} *\colon \mathbf{Z}\times\mathbf{Z} &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ (x,y) &\mapsto x*y := x+y-1 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} *\colon \mathbf{Q}\times\mathbf{Q} &\longrightarrow \mathbf{Q} \\ (x,y) &\mapsto x*y := x^2-y^2 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} *\colon \mathbf{Q}\times\mathbf{Q} &\longrightarrow \mathbf{Q} \\ (x,y) &\mapsto x*y := 2^{xy/2} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} *\colon \mathbf{Z}_+\times\mathbf{Z}_+ &\longrightarrow \mathbf{Z}_+ \\ (x,y) &\mapsto x*y := \exp(xy) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} *\colon \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ (x,y) &\mapsto x*y := x\cap y \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} *\colon \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ (x,y) &\mapsto x*y := x\cap y \end{aligned}$$

(2) Soit $X = \{a, b\}$.
- Déterminez tout les operations binaires sur X. Combien-est-il?
- Lesquelles sont associatives? commutatives?
- Lesquelles possède l'élément neutre?
- Parmi les opérations binaires sur X lesquelles induit une structure d'un groupe sur X?

(3) Soit $*$ une opération binaire sur X avec l'élément neutre e.
- Montrer que si $x \in X$ possède un inverse, noté par x^{-1}, alors x^{-1} est unique.
- Montrer que si $*$ est associative alors $\left((x^{-1})\right)^{-1} = x$. Donner un exemple pour décider la nécessité de associativité de l'opération $*$.
- Supposons que $*$ est associative et $x \in X$ un élément inversible de $*$. Montrer que pour tout $u, v \in X$ on a $u*x = v*x \Rightarrow u = v$.
- Supposons que $*$ est associative et $x \in X$ un élément inversible de $*$. Montrer que pour tout $u, v \in X$ on a $x*u = x*v \Rightarrow u = v$.

(4) Parmi les relations suivantes sur $\mathbf{Z}$ lesquelles sont réflexives, symmétriques, anti-symmétriques, transitives?
- $n \sim_R m :\Leftrightarrow n = 2m$
- $n \sim_R m :\Leftrightarrow n = -m$
- $n \sim_R m :\Leftrightarrow n = km$ pour certain $k \in \mathbf{Z}$
- $n \sim_R m :\Leftrightarrow n < m$
- $n \sim_R m :\Leftrightarrow n \geq m$

- $n \sim_R m :\Leftrightarrow |n| \leq |m+1|$
- $n \sim_R m :\Leftrightarrow 0 \leq nm$
- $n \sim_R m :\Leftrightarrow 0 \geq nm$

(5) Montrer que les relations binaires (sur $\mathbf{Z}$) suivantes sont relations d'équivalences :
- $x \sim_R y :\Leftrightarrow 3 | x^2 + y^2$
- $x \sim_R y :\Leftrightarrow 2 | x^2 - y^2$
- $x \sim_R y :\Leftrightarrow 5 | 7x - 2y$

Pour chaque relation, expliciter la partition induit.

(6) Parmi les relations suivantes (sur $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})$) lesquelles sont une relation d'équivalence :
- $(a, b) \sim_R (c, d) :\Leftrightarrow ad = bc$
- $(a, b) \sim_R (c, d) :\Leftrightarrow ab = cd$
- $(a, b) \sim_R (c, d) :\Leftrightarrow a - b = c - d$
- $(a, b) \sim_R (c, d) :\Leftrightarrow a + b = c + d$
- $(a, b) \sim_R (c, d) :\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

(7) Pour R une relation sur un ensemble non-vide X, on définit l'inverse de R, noté par R^{-1}, comme :

$$x \sim_R y (\text{ ou } (x, y) \in R) \Leftrightarrow y \sim_{R^{-1}} x (\text{ ou } (y, x) \in R^{-1}$$

Pour les relations suivantes calculer R^{-1} où :
- $x \sim_R y :\Leftrightarrow 3x = 2y$ sur $\mathbf{Z}$
- $x \sim_R y :\Leftrightarrow 3 | x^2 + y^2$ sur $\mathbf{Z}$
- $x \sim_R y :\Leftrightarrow 2 | x^2 - y^2$ sur $\mathbf{Z}$
- $(a, b)n \sim_R (c, d) :\Leftrightarrow a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ sur $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})$
- $(a, b)n \sim_R (c, d) :\Leftrightarrow a^2 - b^2 = c^2 - d^2$ sur $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})$

(8) Soit R une relation sur A, un ensemble non-vide. Montrer que
- R est symmétrique si et seulement si $R = R^{-1}$,
- R est anti-symmétrique si et seulement si $R \cap R^{-1} \subseteq \{(a, a) \mid a \in A\}$,

(9) Un élément de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est appellé une transposition si σ échange exactement deux éléments différents de $\{1, 2, \ldots, n\}$.
- Lesquelles sont transpositions : $(1\,4\,3\,2), (1\,6), (1\,5\,6\,7)(6\,5\,2\,7), (1\,4\,6\,5\,2)(1\,6\,3\,4)(4\,2\,3)$?
- Écrire les éléments comme un produit de transpositions : $(3\,2\,5\,6\,1), (3\,4\,2\,8\,5\,2\,1), (1\,5\,4\,6\,7)(4\,3\,6\,1)$
- Montrer que si $\tau \in \mathfrak{S}_n$ un élément quelconque, alors τ peut être exprimé commme un produit de transpositions, c'est-à-dire il existe des transpositions $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\tau = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_k$

(10) Décider si les opérations binaires suivantes sur l'ensembles indiqués sont groupes :
- $(\mathbf{Z}, a * b := a - b)$
- $(\mathbf{Z}, a * b := a + b + ab)$
- $(\mathbf{Z}_+, a * b := a + b)$
- $(\mathbf{Q} \setminus \{-1\}, a * b := a + b + ab)$
- $(G = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \mid \text{pgcd}(p, q) = 1 \text{ et } 5|q \right\}, a * b := a + b)$
- $(G = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \mid \text{pgcd}(p, q) = 1 \text{ et } 5 \nmid q \right\}, a * b := a + b)$
- $(G = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \mid \text{pgcd}(p, q) = 1 \text{ et } 5|p \right\}, a * b := a + b)$
- $(G = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \mid \text{pgcd}(p, q) = 1 \text{ et } 5 \nmid p \right\}, a * b := a + b)$

(11) Montrer que si G est un groupe et $g_1, g_2 \in G$ alors :
- L'inverse (à droite et à gauche) de $g_1 g_2$ est $g_2^{-1} g_1^{-1}$
- L'inverse (à droite et à gauche) de $g_1 g_2 g_1^{-1}$ est $g_1 g_2^{-1} g_1^{-1}$
- Montrer que $(g_1 g_2)^2 \neq g_1^2 g_2^2$ nécessairement.
- Montrer que $(g_1 g_2)^2 = g_1^2 g_2^2$ pour tout $g_1, g_2 \in G$ si et seulement si G est abélien.

(12) Montrer que si pour tout $g \in G$, $g^2 = e$ alors G est abélien. Indication: Calculer $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ pour $g_1, g_2 \in G$ quelconque.

(13) Montrer que si pour tout $g \in G$, $g^3 = e$ alors G est abélien.

(14) Considèrons l'ensemble $G = \{T\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid T(x) = ax + b$ où $a, b \in \mathbf{R}$.

- Montrer que G est un groupe sous la composition.
- Est-ce que $H = \{T\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \in G \mid T(x) = ax\}$ un sous-groupe de G?
- Est-ce que $H = \{T\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \in G \mid T(x) = x + b\}$ un sous-groupe de G?
- Est-ce que $H = \{T\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \in G \mid T(x) = ax + b \text{ avec } a \in \mathbf{Q},\ b \in \mathbf{R}\}$ un sous-groupe de G?

(15) Décider si les parties suivantes de $\mathfrak{S}_n$ sont sous-groupes :

- $\{(1), (1\,2), (1\,2\,3)\}$
- $\{(1), (1\,2), (1\,2\,3), (2\,3)\}$
- $\{(1), (1\,2), (1\,2\,3), (2\,3), (1\,3\,2)\}$
- $\{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \mid \sigma(1) = 1\}$
- $\{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \mid \sigma(1) = 1 \text{ et } \sigma(2) = 2\}$; où $n \geq 2$
- $\{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \mid \sigma^2 = (1)\}$
- $\{\sigma \in \mathfrak{S}_4 \mid \sigma^3 = (1)\}$
- $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) = 1\}$
- $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) = 1 \text{ et } \sigma(2) = 2\}$; où $n \geq 2$
- $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma^2 = (1)\}$
- $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma^3 = (1)\}$